

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Pierre RENOUARD

1^{re} THÈSE : Études sur :

1^o VARIÉTÉS SYMPLECTIQUES ET QUANTIFICATION.

2^o LES CARACTÈRES DU GROUPE DE POINCARÉ.

2^e THÈSE : PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 1^{er} Octobre 1969 devant la Commission d'examen

MM. F. LURÇAT Président

J. DIXMIER

J. LASCOUX

L. MICHEL

} Examineurs



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552201_0039

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Pierre RENOUDARD

1^{re} THÈSE : Études sur :

1^o VARIÉTÉS SYMPLECTIQUES ET QUANTIFICATION.

2^o LES CARACTÈRES DU GROUPE DE POINCARÉ.

2^e THÈSE : PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 1^{er} Octobre 1969 devant la Commission d'examen

MM. F. LURÇAT Président

J. DIXMIER

J. LASCOUX

L. MICHEL

} Examinateurs

THESIS

IN THE FACULTY OF SCIENCES

OF THE UNIVERSITY OF LEIDEN

PHYSICS

THE DEGREE OF DOCTOR IN SCIENCE

AND

PHYSICS



BY

THE DEGREE OF DOCTOR IN SCIENCE

AND

PHYSICS

AND

PHYSICS

REMERCIEMENTS

Monsieur le Professeur Louis MICHEL m'a initié à la physique théorique et m'a constamment prodigué son aide intellectuelle et matérielle : qu'il soit assuré de ma profonde reconnaissance.

Je remercie Monsieur le Professeur François LURÇAT d'avoir accepté de présider mon jury de thèse et Monsieur le Professeur Jacques DIXMIER d'avoir bien voulu en faire partie.

Je remercie tout particulièrement Jean LASCoux qui m'a suggéré d'étudier les problèmes qui font l'objet de cette thèse et qui m'a constamment guidé par de nombreuses suggestions, discussions et critiques.

La seconde partie de cette thèse a été réalisée en collaboration avec Gérard FUCHS : je le remercie de son concours efficace qui a permis de mener à bien ce travail.

Je remercie encore tous les physiciens du Centre de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique qui, sous l'aimable direction de Dimitri FOTIADI, entretiennent une atmosphère de franche amitié, et tout particulièrement Monique LEVY, Michèle VERGNE, Amitabha CHAKRABARTI, Pierre MINNAERT, Roland SENEOR, pour d'innombrables et fructueuses discussions.

Je tiens enfin à remercier le secrétariat qui a assuré l'impression de cette thèse et tout particulièrement Madame ANDALO et Mademoiselle LECUYER qui ont fait preuve d'une rare patience en déchiffrant un manuscrit illisible.

TABLE DES MATIERES

1ère PARTIE

VARIETES SYMPLECTIQUES ET QUANTIFICATION	I.1
INTRODUCTION	I.3
ANNEXE	I.5
I - La représentation de l'algèbre de Lie $C_F^1 \cap \overline{C_F^1}$	I.51
II - Les opérateurs de position	I.61
III - Quantifications non standard	I.69
IV - Groupe des rotations	I.78
V - Espaces homogènes symplectiques du groupe de Poincaré	I.86
VI - Le groupe $SL(2, \mathbb{R})$	I.99
REFERENCES DE LA PARTIE I	I.119

2ème PARTIE

LES CARACTERES DU GROUPE DE POINCARÉ	II.1
INTRODUCTION	II.3
I - Généralités	II.5
II - Les caractères de $SL(2, \mathbb{R})$	II.24
III - Distributions centrales sur le groupe de Poincaré	II.39
IV - Calcul des caractères	II.52
APPENDICE A	II.85
APPENDICE B	II.90
APPENDICE C	II.91
REFERENCES DE LA PARTIE II	II.95

P R E M I E R E P A R T I E

VARIETES SYMPLECTIQUES ET QUANTIFICATION

INTRODUCTION

On étudie quelques applications à la physique des systèmes à un nombre fini de degrés de liberté des travaux de B. Kostant sur les variétés symplectiques.

Ces travaux n'ont pas -à notre connaissance- été publiés : seuls quelques résultats sont mentionnés dans [1]; ils ont été portés à notre connaissance par les notes de cours de Iwahori [2], aussi nous avons jugé bon de résumer dans une annexe (A) les définitions et les principaux résultats, ceux-ci sont donnés sans démonstration. Dans le texte nous ne définissons pas de nouveau les objets et notations introduits dans (A) : nous renvoyons lorsque cela est nécessaire au chapitre et paragraphe correspondant de l'annexe.

Au chapitre I nous démontrons quelques résultats que nous avons cités en (A.IV.3), mais qui ne figurent pas dans le travail de Kostant : nous définissons une représentation d'une algèbre de Lie de fonction "quantifiables" et nous montrons quelques propriétés de cette représentation.

Au chapitre II nous étudions comparativement la quantification du système constitué par un point matériel libre respectivement relativiste ou non relativiste : nous montrons comment la représentation introduite au chapitre I fournit des "opérateurs de position" qui, dans le cas relativiste coïncident avec les opérateurs de Newton-Wigner.

Le chapitre III est consacré à quelques exemples de quantification de systèmes classiques dont l'espace des phases n'est pas simplement connexe : dans ce cas la procédure de quantification n'est pas

unique : on montre en particulier qu'un solide quantique peut avoir un "spin" soit entier, soit demi-entier, selon que la quantification choisie est la quantification standard ("principe de correspondance") ou non.

Au chapitre IV, on construit les représentations canoniques du groupe $SU(2)$ associées aux orbites de ce groupe dans le dual de son algèbre de Lie; certains résultats sont utilisés au chapitre suivant.

On étudie les orbites du groupe de Poincaré dans le dual de son algèbre de Lie au chapitre V; on montre en particulier que pour une particule de masse non nulle et de spin quelconque il existe des opérateurs de position que l'on trouve être identique aux opérateurs de Chakrabarti; on montre que ces opérateurs sont essentiellement auto-adjoints sur un domaine naturel. Pour des particules de masse nulle et d'hélicité non nulle, on montre par contre qu'il n'existe pas d'opérateurs de position (ce résultat a déjà été montré [12] à partir d'hypothèses différentes).

Le chapitre VI est consacré à l'application de la méthode de Kostant du groupe $SL(2, \mathbb{R})$: on obtient ainsi des contre-exemples à deux conjectures formulées dans [2].

ANNEXE

RESUME DES TRAVAUX DE B. KOSTANT [2]

Avertissements

1. Dans tout ce résumé, les objets considérés (variétés, fonctions, champs de vecteurs, formes, etc...) sont supposés -sauf mention explicite du contraire- de classe C^∞ , cette qualification sera donc omise. Dans le cas où une précision serait nécessaire on emploiera seulement le mot "différentiable" (qui signifie donc ici : "de classe C^∞ ").

2. On ne précisera pas en général si les fonctions, champs de vecteurs, formes, etc... sont réels ou complexes et l'on utilisera indifféremment la même notation ($C, U, \Omega...$ voir ci-dessous) pour désigner les uns ou les autres. S'il est nécessaire de préciser on utilisera par exemple les notations $C^{\mathbb{R}}$, et $C^{\mathbb{C}}$ etc...

I - VARIETES SYMPLECTIQUESI.1 Variétés (notations)

Si X est une variété réelle de dimension finie m on désigne par

- $C = C(X)$ l'algèbre des fonctions sur X à valeur scalaire
- X_x (si $x \in X$) le plan tangent à X en x (X_x^* est le plan cotangent)
- $U = U(X)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur X

. La loi est notée $\xi, \eta \rightsquigarrow [\xi, \eta]$ $\xi, \eta \in U(X)$

. $U(X)$ est un $C(X)$ module $\varphi, \xi \rightsquigarrow \varphi \xi \in U$, $\varphi \in C$, $\xi \in U$

. $C(X)$ est un $U(X)$ module $\xi, \varphi \rightsquigarrow \xi \varphi \in C$, $\varphi \in C$, $\xi \in U$

- Ω^j ($j = 0, \dots, m$) l'espace vectoriel des j -formes sur X ($\Omega^0 = C$)

- $\Omega = \bigoplus_{j=0}^m \Omega^j$ l'algèbre associative (pour la multiplication extérieure,

notée Λ) des formes différentielles sur X .

. Ω est un $\mathbb{C}$ module

- d la différentiation extérieure (c'est une antiderivation de Ω) $d^2 = 0$

- $i(\xi)$ (pour $\xi \in U$) la multiplication intérieure ($i(\xi) : \Omega^j \rightarrow \Omega^{j-1}$)

. c'est l'antiderivation de Ω définie par

$$i(\xi) \beta(\xi^1, \dots, \xi^{j-1}) = \beta(\xi, \xi^1, \dots, \xi^{j-1}) \quad \beta \in \Omega^j ; \xi, \xi^i \in U$$

- $\theta(\xi)$ (pour $\xi \in U$) la différentiation de Lie ($\theta(\xi) : \Omega^j \rightarrow \Omega^j$)

. c'est l'unique homomorphisme d'algèbres de Lie $\theta : U \rightarrow \text{Der } \Omega$

tel que $\forall \xi \in U$ 1/ $\theta(\xi)$ commute avec d

$$2/ \quad \theta(\xi)\beta = \xi\beta \quad \forall \beta \in \Omega^0 = \mathbb{C}$$

. on a $\theta(\xi) = i(\xi)d + di(\xi) \quad \forall \xi \in U$

. et $[\theta(\xi), i(\eta)] = i([\xi, \eta]) \quad \xi, \eta \in U$

. Si $\xi \in U$ définit un champ de vecteurs à un paramètre

$t \mapsto \exp t \xi$ on a $(\exp -t \xi)^* \beta = \beta \Leftrightarrow \theta(\xi)\beta = 0 \quad (\beta \in \theta)$

I.2 Variétés symplectiques

Une variété symplectique est un couple (X, ω) où X est une variété réelle de dimension paire $2n$ et ω une 2-forme réelle, fermée, partout non dégénérée sur X .

- Transformation hamiltonienne locale [3]

On désigne par $\omega_b : U \rightarrow \Omega^1$ la bijection linéaire définie par $\omega_b(\xi) = i(\xi)\omega, (\xi \in U)$ et par $\omega_{\#} : \Omega^1 \rightarrow U$ la bijection inverse.

- Champs de vecteurs localement hamiltoniens (l.H.)

$$\stackrel{\text{def}}{\xi \in U \text{ est l.H.}} \Leftrightarrow \theta(\xi)\omega = 0 \Leftrightarrow d\omega_b(\xi) = 0$$

$\mathfrak{h}_0$ désigne la sous-algèbre de Lie de U des champs de vecteurs

l.H..

- Champs de vecteurs hamiltoniens (H.)

$$\xi \in U \stackrel{\text{def}}{\text{est H.}} \Leftrightarrow \exists \varphi \in \Omega_0 = C \quad \omega_b(\xi) = d\varphi$$

Le sous-espace $\mathfrak{H}$ des champs de vecteurs H. est un idéal de $\mathfrak{H}_0$

$$([\mathfrak{H}_0, \mathfrak{H}_0] \subset \mathfrak{H} ; \text{ si } \dim \mathfrak{H}_0/\mathfrak{H} < \infty : [\mathfrak{H}_0, \mathfrak{H}_0] = \mathfrak{H} \quad (\text{Calabi}))$$

D'après De Rham $\mathfrak{H}_0/\mathfrak{H} \simeq H^1(X, \mathbb{C})$, en particulier si X est simplement connexe $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0$.

- Crochets de Poisson. (Structure d'algèbre de Lie sur C)

$$\text{On pose} \quad \gamma : \Omega^0 \rightarrow U \quad \gamma = \omega_{\#} \circ d$$

L'application $\varphi, \psi \mapsto [\varphi, \psi] = \gamma(\varphi)\psi = \omega(\gamma(\psi), \gamma(\varphi)) \quad \varphi, \psi \in C$ définit une loi d'algèbre de Lie sur C.

- La suite exacte fondamentale

La suite $0 \rightarrow C \xrightarrow{i} C \xrightarrow{\gamma} \mathfrak{H} \rightarrow 0$ est une suite exacte d'algèbres de Lie (i désigne l'injection canonique i(a) (a ∈ C) est la fonction constante égale à a)

- Remarque

1. $\xi \in U$ est une dérivation de l'algèbre de Lie C si et seulement si $\xi \in \mathfrak{H}_0$.

$$(\xi[\varphi, \psi] = [\xi\varphi, \psi] + [\varphi, \xi\psi] + (\theta(\xi)\omega)(\gamma(\varphi), \gamma(\psi)) , \quad \xi \in U \quad \varphi, \psi \in C)$$

2. La distribution définie par $\xi \in \mathfrak{H}_0$ est intérieure si et seulement si $\xi \in \mathfrak{H}$. L'algèbre $\mathfrak{H}$ est l'algèbre des dérivations intérieures de C (C est le centre de C).

I.3 L'exemple de la mécanique classique (fibré cotangent)

En mécanique classique [3] l'espace des phases X (en variables de moments) est le fibré cotangent à l'espace de configuration M

$$X = T^*M \quad X = \bigcup_{m \in M} M_m^* \quad (\text{union disjointe})$$

On désigne par $\sigma : X \rightarrow M$ la projection canonique ($\sigma^{-1}(m) = M_m^*$).

Si u^i est une carte locale dans $U \subset M$ on définit les coordonnées de $r \in \sigma^{-1}(U)$ ($\sigma r = m \in U, r \in M_m^*$) par

$$q^i = u^i \circ \sigma \quad p_i = \left\langle r, \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right)_{\sigma r} \right\rangle$$

Dans cette carte, la 1-forme canonique

(définie par $\beta_r(v) = \langle r, \sigma_* v \rangle \quad \forall v \in X_r \quad \sigma_* v \in M_{\sigma r}$)

et la 2-forme $\omega = d\beta$ ont pour expression

$$\beta = \sum_i p_i dq^i \quad \omega = \sum_i dp_i \wedge dq^i$$

(X, ω) est une variété symplectique

$$\forall \varphi \in C \quad \gamma(\varphi) = \omega_{\#} d\varphi = \sum_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} \right)$$

et le crochet de Poisson de φ et $\psi \in C$ s'écrit

$$[\varphi, \psi] = \sum_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q^i} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial \psi}{\partial q^i} \right)$$

On peut enfin remarquer sur cet exemple (avec $M = \mathbb{R}^n$) que la suite

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow C \rightarrow \mathcal{U} \rightarrow 0$$

ne définit pas une extension inessentielle de $\mathcal{U}$ par $\mathbb{C}$: la sous-algèbre $\mathcal{H}$ de C engendrée par $1, p_i, q^i$ (algèbre de Heisenberg) vérifie les relations de commutations canoniques.

$$[p_i, p_j] = 0 \quad [q^i, q^j] = 0 \quad [q^i, p_j] = \delta_j^i$$

or

$$\gamma(1) = 0 \quad \gamma(p_i) = \frac{-\partial}{\partial q^i} \quad \gamma(q^i) = \frac{\partial}{\partial p_i}$$

donc $\gamma(\mathfrak{h})$ est une algèbre abélienne et la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathfrak{h} \rightarrow \gamma(\mathfrak{h}) \rightarrow 0$$

ne définit pas une extension inessentielle.

I.4 Action d'un groupe de Lie sur une variété symplectique

G désigne un groupe de Lie réel connexe de dimension finie, $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie.

- Si G agit à gauche sur une variété X (X est une G -variété)

$$((g, x) \rightarrow g \cdot x \in X, \quad g_1(g_2 x) = (g_1 g_2) x ; \quad g, g_1, g_2 \in G, \quad x \in X)$$

on désigne par $\sigma : \mathcal{G} \rightarrow U$ l'homomorphisme canonique d'algèbres de Lie défini par

$$(\sigma(\xi)\varphi)(x) = \frac{d}{dt} \varphi(\exp -t\xi \cdot x) \Big|_{t=0} \quad \xi \in \mathcal{G}, \quad \varphi \in C, \quad x \in X$$

Pour $x \in X$ l'application linéaire $\sigma_x : \mathcal{G} \rightarrow X_x$ ($\sigma_x(\xi) = \sigma(\xi)_x$) a pour noyau l'algèbre de Lie $\mathcal{G}_x$ de la composante connexe du groupe $G_x = \{g \in G, \quad gx = x\}$. Si X est un espace homogène σ_x est surjectif pour tout x et la suite

$$0 \rightarrow \mathcal{G}_x \rightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\sigma_x} X_x \rightarrow 0 \text{ est exacte.}$$

Si X est une variété quelconque, par tout point $x \in X$ passe une orbite unique $\sigma(x) = G \cdot x$, $\sigma(x)$ (identifié à G/G_x) est une variété et l'injection canonique $\sigma(x) \rightarrow X$ est différentiable et partout régulière : la suite

$$0 \rightarrow \mathcal{G}_x \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \sigma(x)_x \rightarrow 0$$

est exacte.

Si (X, ω_X) et (Y, ω_Y) sont deux variétés symplectiques, une application $\tau : X \rightarrow Y$ est dite symplectique si $\tau^* \omega_Y = \omega_X$

Si (X, ω) est une variété symplectique et si X est une G -variété, on dit que G est symplectique sur (X, ω) ((X, ω) est une G -variété symplectique), si $\forall g \in G$ l'application $g : x \mapsto gx$ est symplectique.

Lemme : G est symplectique sur (X, ω) si et seulement si $\sigma(\mathcal{G}) \subset \mathfrak{u}_0$.

On dit que G est fortement symplectique sur (X, ω) si $\sigma(\mathcal{G}) \subset \mathfrak{u}$.

Ceci se produit en particulier (si G est symplectique sur (X, ω) et)

* si X est simplement connexe ($H^1(X, \mathbb{C}) = 0 \Rightarrow \mathfrak{u}_0 = \mathfrak{u}$)

* ou si $H^1(\mathcal{G}, \mathbb{R}) = 0$ ($\mathcal{G} = [\mathcal{G}, \mathcal{G}]$ et $[\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_0] \subset \mathfrak{u}$)

Remarque

1. G définit un groupe d'automorphismes de l'algèbre de Lie C si et seulement si G est symplectique sur (X, ω) .
2. Les dérivations de C définies par $\mathcal{G}$ sont intérieures si et seulement si G est fortement symplectique.

- Homomorphismes de G -variétés : si X et Y sont deux G -variétés, une application $\tau : X \rightarrow Y$ est un homomorphisme de G -variétés (τ est G -équivariant) si $\tau(gx) = g\tau(x) \forall g \in G, x \in X$.

Si $(X, \omega_X), (Y, \omega_Y)$ sont deux G -variétés symplectiques, $\tau : X \rightarrow Y$ est un homomorphisme de G -variétés symplectiques si τ est symplectique et G -équivariant.

Cas des revêtements

Lemme : soit X une G -variété, $\tilde{X}$ un revêtement de X et $\tau : \tilde{X} \rightarrow X$ la projection canonique. Si G est simplement connexe, il existe une action unique de G sur $\tilde{X}$ tel que τ soit G -équivariant.

Lemme : si (X, ω) est une variété symplectique, $\tau : \tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement de X , soit $\tilde{\omega} = \tau^* \omega$ alors $(\tilde{X}, \tilde{\omega})$ est une variété symplectique.

Lemme : soient (X, ω) une G -variété symplectique $\tau: \tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement de X , $\tilde{\omega} = \tau^* \omega$; on suppose G simplement connexe : G agit sur $\tilde{X}$, alors $(\tilde{X}, \tilde{\omega})$ est une G -variété symplectique et τ est un homomorphisme de G -variétés symplectiques.

- Remarques sur les relèvements

Si G est fortement symplectique sur (X, ω) on a $\sigma(\mathcal{G}) \subset \mathcal{U}$, il sera utile de savoir si σ admet un relèvement, c'est-à-dire s'il existe un homomorphisme d'algèbres de Lie $\lambda: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{C}$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} & & i & & \gamma & & \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{C} & \rightarrow & \mathcal{U} & \rightarrow & 0 \\ & & \nwarrow \lambda & & \uparrow \sigma & & \\ & & & & \mathcal{G} & & \end{array}$$

soit commutatif.

Lemme : si la suite exacte d'algèbres de Lie

$$0 \rightarrow V \rightarrow \mathfrak{B} \xrightarrow{j} \mathcal{U} \rightarrow 0$$

définit une extension centrale, un homomorphisme $\sigma: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{U}$ admet un relèvement $\lambda: \mathcal{G} \rightarrow \mathfrak{B}$

$$\begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \\ 0 & \rightarrow & V & \rightarrow & \mathfrak{B} & \rightarrow & \mathcal{U} \rightarrow 0 \\ & & \nwarrow \lambda & & \uparrow \sigma & & \\ & & & & \mathcal{G} & & \end{array}$$

si et seulement si $\sigma^*[\mathfrak{B}] = 0$ (où $[\mathfrak{B}] \in H^2(\mathcal{U}, V)$ est la classe de l'extension considérée et $\sigma^*: H^2(\mathcal{U}, V) \rightarrow H^2(\mathcal{G}, V)$).

Lemme : dans les mêmes hypothèses si σ admet deux relèvements λ et λ' on a $\lambda - \lambda' \in \text{Hom}(\mathcal{G}, V)$, donc $(\lambda - \lambda')([\mathfrak{B}]) = 0$; si λ est un relèvement et si $f \in \text{Hom}(\mathcal{G}, V)$, $\lambda + f$ est un relèvement.

I.5 Orbites dans le dual de l'algèbre de Lie

Soit $\mathcal{G}^*$ le dual de $\mathcal{G}$. G agit alors par $g.p = \text{Ad}(g^{-1})^t p$, $g \in G$, $p \in \mathcal{G}^*$

Soient $p \in \mathcal{G}^*$, $X = Gp$, $G_p = \{g \in G, gp = p\}$, $\mathcal{G}_p = \{\xi \in \mathcal{G}, \langle p, [\xi, \mathcal{G}] \rangle = 0\}$ et $\sigma: \mathcal{G} \rightarrow U(X)$ l'homomorphisme canonique.

L'application $(\sigma(\xi), \sigma(\eta)) \mapsto \langle f, [\eta, \xi] \rangle$, $\xi, \eta \in \mathcal{G}$, $f \in X \subset \mathcal{G}^*$ définit une 2-forme ω sur X et (X, ω) est une variété symplectique.

Théorème : G est fortement symplectique sur (X, ω) .

Remarque : $\sigma: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{U}$ admet un relèvement $\phi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{C} & \xrightarrow{i} & \mathcal{C} & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{U} \rightarrow 0 \\ & & & & \searrow \phi & & \uparrow \sigma \\ & & & & & & \mathcal{G} \end{array}$$

défini par $\phi^\xi(f) = \langle f, \xi \rangle$, $\xi \in \mathcal{G}$, $f \in X$

Classification

Deux orbites (X, ω) et (X', ω') dans $\mathcal{G}^*$ sont isomorphes (comme G -espaces homogènes symplectiques) si et seulement si il existe $f \in \mathcal{G}$ tel que $X' = f + X$
où

$$\mathcal{G} = \{f \in \mathcal{G}^*, gf = f\} = \{f \in \mathcal{G}^*, \langle f, [\mathcal{G}, \mathcal{G}] \rangle = 0\} \simeq H^1(\mathcal{G}, \mathbb{R})$$

Théorème : soit (Y, ω_Y) un G -espace homogène fortement symplectique, alors $\sigma: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{U}(Y)$ admet un relèvement $\lambda: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{C}(Y)$ si et seulement si il existe une orbite $X \subset \mathcal{G}^*$ telle que (Y, ω_Y) soit un revêtement de (X, ω) comme G -espaces homogènes symplectiques.

Soit $\tau : Y \rightarrow X$ le morphisme correspondant

- tout autre $X' \in \mathcal{G}^*$ telle que (Y, ω_Y) soit un revêtement de (X', ω') est de la forme $X' = f + X$ avec $f \in \mathcal{G}$ et l'on a

$$\tau'(y) = \tau(y) + f \quad \forall y \in Y.$$

I.6 Classification des G-espaces homogènes fortement symplectiques

Lemme : étant données deux extensions centrales d'algèbres de Lie

$$0 \rightarrow V \rightarrow \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A} \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{h} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$$

et deux homomorphismes $\sigma : \mathcal{G} \rightarrow \mathfrak{A}$ et $\rho : \mathfrak{K} \rightarrow V$ il existe un homomorphisme $\pi : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{B}$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & V & \rightarrow & \mathfrak{B} & \rightarrow & \mathfrak{A} \rightarrow 0 \\ & & \rho \uparrow & & \pi \uparrow & & \sigma \uparrow \\ 0 & \rightarrow & \mathfrak{K} & \rightarrow & \mathfrak{h} & \rightarrow & \mathcal{G} \rightarrow 0 \end{array}$$

soit commutatif si et seulement si $\sigma^*[\mathfrak{B}] = \rho^*[\mathfrak{h}]$

(où $[\mathfrak{B}] \in H^2(\mathfrak{A}, V)$, $[\mathfrak{h}] \in H^2(\mathcal{G}, \mathfrak{K})$; $\sigma^* : H^2(\mathfrak{A}, V) \rightarrow H^2(\mathcal{G}, V)$; $\rho^* : H^2(\mathcal{G}, \mathfrak{K}) \rightarrow H^2(\mathcal{G}, V)$)

si π et π' sont deux solutions du problème on a $\pi - \pi' \in \text{Hom}(\mathcal{G}, V)$
soit $(\pi - \pi')([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$

Une extension centrale particulière

Si $\mathcal{G}$ est une algèbre de Lie réelle de dimension finie on désigne par $\mathfrak{K}$ le dual de $H^2(\mathcal{G}, \mathbb{R})$ ($\mathfrak{K} = H^2(\mathcal{G}, \mathbb{R})^*$)

Si V est un espace vectoriel, on a les isomorphismes canoniques :

$$H^2(\mathcal{G}, V) \simeq H^2(\mathcal{G}, \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} V \simeq \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}, V)$$

donc

$$H^2(\mathcal{G}, \mathcal{K}) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}, \mathcal{K})$$

On désigne par $\mathcal{G}_E$ l'extension de $\mathcal{G}$ par $\mathcal{K}$ dont la classe $[\mathcal{G}_E] \in H^2(\mathcal{G}, \mathcal{K})$ s'identifie à l'application identique[♦] de $\mathcal{K}$ sur $\mathcal{K}$

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{G}_E \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0 \quad ([\mathcal{G}_E] \simeq \text{Id}_{\mathcal{K}})$$

Lemme : pour tout $\rho \in H^2(\mathcal{G}, V) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}, V)$ on a $\rho^*[\mathcal{G}_E] \simeq \rho$

Proposition : soient $0 \rightarrow V \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{U} \rightarrow 0$ une extension centrale d'algèbres de Lie et $\sigma : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{U}$ un homomorphisme, si $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{F} < \infty$ il existe un homomorphisme $\pi : \mathcal{G}_E \rightarrow \mathcal{F}$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{U} \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & \pi|_{\mathcal{K}} & & \pi & & \sigma \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathcal{G}_E & \longrightarrow & \mathcal{G} \longrightarrow 0 \end{array}$$

soit commutatif; de plus $\pi|_{\mathcal{K}} = \sigma^*[\mathcal{B}]$ est indépendant de π .

Orbites dans $\mathcal{G}_E^*$

On désigne par G et G_E les groupes simplement connexes d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}_E$ respectivement; G est un quotient de G_E :

$$1 \rightarrow K \rightarrow G_E \rightarrow G \rightarrow 1$$

Le noyau K est connexe et a pour algèbre de Lie $\mathcal{K}$ donc K appartient au centre de G_E et par suite toute G_E -orbite dans $\mathcal{G}_E^*$ est une G -orbite.

[♦] Il suffirait que $[\mathcal{G}_E] : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{K}$ soit inversible.

Lemme : si f et g appartiennent à une même G -orbite dans $\mathcal{G}_E^*$, on a $f|_K = g|_K$ ce qui permet d'associer à toute G -orbite $X \subset \mathcal{G}_E^*$, $v(X) \in H^2(\mathcal{G}, \mathbb{R}) \simeq K^*$ $v(X) = f|_K$, $f \in X$. Si l'on identifie $\mathcal{G}^*$ à $\{f \in \mathcal{G}_E^*, f|_K = 0\}$.
On a $X \subset \mathcal{G}^* \Leftrightarrow v(X) = 0$

Théorème : 1. $\hat{\mathcal{G}} = \mathcal{G}_E$ ($\hat{\mathcal{G}} = \{f \in \mathcal{G}^*, f([\mathcal{G}, \mathcal{G}]) = 0\}$)

2. Si (X, ω) est un G -espace homogène symplectique, G est fortement symplectique sur (X, ω) si et seulement si il existe une G -orbite $Y \subset \mathcal{G}_E^*$ telle que (X, ω) soit un revêtement de (Y, ω_Y) comme G -espaces homogènes symplectiques.

Si $Y' \subset \mathcal{G}_E^*$ est une autre orbite possédant la même propriété, on a $Y' = f + Y$ $\tau'(x) = f + \tau(x) \quad \forall x \in X$, avec $f \in \hat{\mathcal{G}}$.

Remarque : si $\varphi : \mathcal{G}_E \rightarrow C(X)$ est défini par $\varphi = \phi \circ \tau$ (avec $\phi^\xi(f) = \langle f, \xi \rangle$, $f \in \mathcal{G}_E^*$, $\xi \in \mathcal{G}_E$) le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{C} & \longrightarrow & C & \longrightarrow & \mathcal{U} \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow \varphi|_K & & \uparrow \varphi & & \uparrow \sigma \\ 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & \mathcal{G}_E & \longrightarrow & \mathcal{G} \longrightarrow 0 \end{array}$$

est commutatif et $\varphi|_K = \sigma^*[C] = v(X) \in H^2(\mathcal{G}, \mathbb{R})$ ($\sigma^*[C]$ est réel).

Description des G -espaces homogènes symplectiques

Soit (X, ω) un G -espace homogène, (on suppose G simplement connexe). Soit $\tilde{X}$ le revêtement universel de X . G est fortement symplectique sur $(\tilde{X}, \tilde{\omega})$ (puisque $\tilde{X}$ est simplement connexe) donc $\tilde{X}$ recouvre une orbite dans $\mathcal{G}_E^*$.

$\tilde{X}$ s'identifie à $G/G_{\tilde{X}}$ et X à G/G_X où $G_{\tilde{X}}$ est la composante connexe de G_X donc $G_X/G_{\tilde{X}}$ est un sous-groupe discret de $N_{\tilde{X}}/G_{\tilde{X}}$ où $N_{\tilde{X}}$ est le normalisateur de $G_{\tilde{X}}$ dans G .

II.1 Fibrés linéaires (F.L.)

Définition : une variété L est un fibré linéaire sur la variété X s'il existe une application $\sigma : L \rightarrow X$ surjective (différentiable) telle que

i - $\forall x \in X \quad L_x = \sigma^{-1}(x)$ est un espace vectoriel de dimension 1 sur $\mathbb{C}$.

ii - Il existe un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i \in I}$ de X et une famille de sections $(\sigma_0 \ s_i = \text{Id}_{U_i}) \quad s_i : U_i \rightarrow L$ et une famille de difféomorphismes $\eta_i : \mathbb{C} \times U_i \rightarrow \sigma^{-1}(U_i)$ tels que

$$\begin{aligned} - s_i(x) &\neq 0 \quad \forall x, \\ - \eta_i(x, c) &= c s_i(x). \end{aligned}$$

Un recouvrement $\{U_i\}_{i \in I}$ possédant ces propriétés est dit admissible.

Notation : dans la suite on pose $U_{i_1 \dots i_k} = U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_k}$.

Fonctions de transition

Soit (L, X, σ) un F.L. sur X , on définit les fonctions de transition (différentiables) $c_{ij} : U_{ij} \rightarrow \mathbb{C}^*$ par $s_i c_{ij} = s_j$.

On a

$$\begin{aligned} (1) - c_{ij} c_{jk} &= c_{ik} \quad \text{sur } U_{ijk}, \\ (2) - c_{ii} &= 1 \quad \text{sur } U_i, \\ (3) - c_{ij} &= c_{ji}^{-1} \quad \text{sur } U_{ij}. \end{aligned}$$

Réciproquement : si $\{U_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement de X et $c_{ij} : U_{ij} \rightarrow \mathbb{C}^*$ une famille de fonctions vérifiant (1), (2) et (3), il existe un F.L. (L, X, σ) (et des sections $s_i : U_i \rightarrow L$, $s_i(x) \neq 0 \quad \forall x$) dont les c_{ij} sont

les fonctions de transition.

Isomorphisme de fibrés linéaires

Deux F.L. (L^1, X, σ^1) et (L^2, X, σ^2) sont isomorphes s'il existe un difféomorphisme $\tau : L^1 \rightarrow L^2$ tel que

i - le diagramme

$$\begin{array}{ccc} L^1 & \xrightarrow{\tau} & L^2 \\ \sigma^1 \searrow & & \swarrow \sigma^2 \\ & X & \end{array}$$

est commutatif.

ii - $\tau|_{L_x^1} : L_x^1 \rightarrow L_x^2$ est linéaire pour tout $x \in X$.

Proposition : deux F.L. (L^1, X, σ^1) et (L^2, X, σ^2) sont isomorphes si et seulement si il existe un recouvrement admissible commun $\{U_i\}_{i \in I}$ et des fonctions $\lambda_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^*$ telles que

$$\lambda_i c_{ij}^{(1)} \lambda_j^{-1} = c_{ij}^{(2)} \quad \text{dans } U_{ij}$$

On note $[L] = [(L, X, \sigma)]$ la classe d'équivalence à l'isomorphisme près du F.L. (L, X, σ) et $\mathcal{L}(X)$ l'ensemble des classes d'équivalences de F.L. sur X . $\mathcal{L}(X)$ est groupe ($[L^3] = [L^1] + [L^2]$ si $c_{ij}^{(3)} = c_{ij}^{(1)} c_{ij}^{(2)}$; élément neutre $\mathbb{C} \times X$) canoniquement isomorphe à $H^2(X, \mathbb{Z})$:

$$c_{ij} = e^{2i\pi f_{ij}}, \quad n_{ijk} = f_{jk} - f_{ik} + f_{ij} \in \mathbb{Z}, \quad [L] \approx [n]$$

Expression locale d'une section

Si $s : X \rightarrow L$ est une section on définit les fonctions (différentiables) $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$ par $s = f_i s_i$ sur U_i , on a $c_{ij} f_j = f_i$ sur U_{ij} .

Réciproquement si on donne une famille de fonction $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$ telle

que $c_{ij} f_j = f_i$ sur U_{ij} , il existe une section unique s telle que $s = f_i s_i$ sur U_i . On note $S = S(L, X, \sigma)$ l'espace vectoriel des sections

différentiables de (L, X, σ)

II.2 Fibrés linéaires munis d'une connexion (F.L.C.)

Soit $L_x^* = L_x \setminus \{0\}$, $L^* = \bigcup_{x \in X} L_x^*$ est un ouvert de L , si $\pi = \sigma|_{L^*}$
 (L^*, X, π) est le fibré principal associé à (L, X, σ) . $\mathbb{C}^*$ agit sur L^* .
 On désigne par $\beta_x \in \Omega^1(L_x^*)$ la 1-forme canonique (image de $\frac{1}{2i\pi} \frac{dz}{z} \in \Omega^1(\mathbb{C}^*)$)
 par une application linéaire quelconque $\tau : L_x \rightarrow \mathbb{C}$).

Définition : $\alpha \in \Omega^1(L^*)$ est une connexion pour (L, X, σ) si

i - α est invariante par l'action de $\mathbb{C}^*$ sur L^* .

ii - $\alpha|_{L_x^*} = \beta \quad \forall x \in X$

On note (L, α) le fibré L muni de la connexion α .

Isomorphismes de fibrés linéaires munis de connexion

Deux F.L.C. sur X : (L, α) , (L', α') sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de F.L.C. $\tau : L \rightarrow L'$, tel que $\tau^* \alpha' = \alpha$ (ce qui implique en particulier $[L] = [L']$). On note $[(L, \alpha)]$, la classe d'équivalence, à l'isomorphisme près, de (L, α) .

Expression locale d'une connexion

Soient (L, X, σ) , (L^*, X, π) , $\alpha \in \Omega^1(L^*)$, $\{U_i\}_{i \in I}$, $s_i : U_i \rightarrow L^*$,
 $c_{ij} : U_{ij} \rightarrow \mathbb{C}^*$ ($s_i c_{ij} = s_j$) comme ci-dessus.

On pose $\alpha_i = s_i^* \alpha \in \Omega^1(U_i)$,

on a $\alpha_j = \alpha_i + \frac{1}{2i\pi} \frac{dc_{ij}}{c_{ij}}$ sur U_{ij} .

Réciproquement : si on donne une famille de 1-formes $\alpha_i \in \Omega^1(U_i)$ telles que $\alpha_j = \alpha_i + \frac{1}{2i\pi} \frac{dc_{ij}}{c_{ij}}$, il existe une connexion unique α sur le fibré L

défini par les fonctions de transition c_{ij} , telle que $\alpha_i = s_i^* \alpha$.

Dérivation covariante

- Soit (L, α) un F.L.C. sur X et $s : X \rightarrow L$ une section $s = f_i s_i$ sur U_i , pour tout $\xi \in U(X)$ on définit

$$g_i = \xi f_i + 2i\pi \langle \alpha_i, \xi \rangle f_i .$$

On a $c_{ij} g_j = g_i$ donc il existe $t : X \rightarrow L$, telle que $t = g_i s_i$, on pose $t = \nabla_\xi s$. (t est indépendant du choix des U_i et des s_i)

- Si $v \in X_x$ on pose

$$\nabla_v s = \{v f_i + 2i\pi \langle (\alpha_i)_x, v \rangle f_i(x)\} s_i(x) \in L_x \quad (\text{si } x \in U_i) .$$

Courbure :

Il existe une 2-forme unique $\omega \in \Omega^2(X)$, $d\omega = 0$ telle que $\pi^* \omega = d\alpha$ de plus $\omega|_{U_i} = d\alpha_i$.

Remarque :

Si $\forall i \in I$ U_i est contractible, pour toute famille $\alpha_i \in \Omega^1(U_i)$ telle que $d\alpha_i = \omega$, il existe une famille de sections $s_i : U_i \rightarrow L^*$, telle que $\alpha_i = s_i^* \alpha$ (tout autre choix est défini par $s_i' = c_i s_i$, $c_i \in \mathbb{C}^*$).

Isomorphisme de fibrés munis d'une connexion

(L, α) et (L', α') sont isomorphes si et seulement si il existe un recouvrement admissible $\{U_i\}_{i \in I}$ et une famille de fonctions $\lambda_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^*$ telle que

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \lambda_i^{-1} c'_{ij} \lambda_j \\ \alpha_i &= \alpha'_i + \frac{1}{2i\pi} \frac{d\lambda_i}{\lambda_i} . \end{aligned}$$

Corollaire :

Si (L, α) et (L', α') sont isomorphes, leurs courbures sont égales $\omega = \omega'$.

Lemme : si $\omega \in \Omega^2(X)$ est la courbure du F.L.C. (L, α) on a $i_*[L] = [\omega] \in H^2(X, \mathbb{C})$ (où $i_* : H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{C})$ est l'homomorphisme canonique et où l'on a identifié $\mathcal{L}(X)$ à $H^2(X, \mathbb{Z})$ par l'isomorphisme précédemment défini) donc $[\omega]$ est entière ($[\omega] \in i_* H^2(X, \mathbb{Z})$).

Lemme : si $[L] \in \mathcal{L}(X)$ et $\omega \in \Omega^2(X)$, $d\omega = 0$ sont tels que $i_*[L] = [\omega]$ il existe une connexion α sur L telle que ω soit la courbure du F.L.C. (L, α) .

Corollaire : si $\omega \in \Omega^2(X)$, $d\omega = 0$, il existe un F.L.C. sur X (L, α) dont ω est la courbure si et seulement si $[\omega]$ est entière.

Ni $[(L, \alpha)]$, ni $[L]$ n'est en général unique.

Soient $\mathcal{L}_\omega^{[L]}(X)$ l'ensemble des classes d'équivalence de F.L.C. (L, α) sur X dont ω est la courbure et telles que $[L]$ est fixé ($i_*[L] = [\omega]$) et $\mathcal{L}_\omega(X) = \bigcup_{i_*[L] = [\omega]} \mathcal{L}_\omega^{[L]}(X)$ l'ensemble des classes d'équivalences de F.L.C. sur X .

$H^1(X, \mathbb{C}^*)$ agit sur $\mathcal{L}_\omega(X)$: soit $\{z_{ij}\} \in Z^1(X, \mathbb{C}^*)$ et $\{c_{ij}, \alpha_i\}$ un F.L.C. on pose

$$[\{z_{ij}\}][\{c_{ij}, \alpha_i\}] = [\{z_{ij} c_{ij}, \alpha_i\}].$$

Proposition : i - $H^1(X, \mathbb{C}^*)$ agit de façon simplement transitive sur $\mathcal{L}_\omega(X)$.

ii - pour tout $[L]$ tel que $i_*[L] = [\omega]$, $e_* H^1(X, \mathbb{C}) \subset H^1(X, \mathbb{C}^*)$ agit de façon simplement transitive sur $\mathcal{L}_\omega^{[L]}(e_* : H^1(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^1(X, \mathbb{C}^*)$ est l'application canonique).

II.3 Parallélisme

Sections autoparallèles

Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ une courbe (différentiable par morceaux) dans X .

On pose

$$\gamma'(t) \in X_{\gamma(t)} \quad \gamma'(t)\varphi = \left. \frac{d}{d\tau} \varphi(\gamma(t+\tau)) \right|_{\tau=0} \quad \varphi \in C(X) \quad ,$$

$s : [a, b] \rightarrow L$ est une section au-dessus de γ , si $s(t) \in L_{\gamma(t)} \quad \forall t \in [a, b]$.

On définit

$$\nabla_{\gamma'(t)} s \in L_{\gamma(t)} \quad \text{par} \quad \nabla_{\gamma'(t)} s = \left\{ \frac{df_i}{dt} + 2i\pi \langle \alpha_{i\gamma(t)}, \gamma'(t) \rangle f_i(t) \right\} s_i(\gamma(t)) \quad ,$$

$$\text{si} \quad s(t) = f_i(t) s_i(\gamma(t)).$$

Définition : s est autoparallèle au-dessus de γ si $\nabla_{\gamma'(t)} s = 0 \quad \forall t \in [a, b]$

Remarque : si $s : [a, b] \rightarrow L^*$ est une section au-dessus de γ , on a

$$\nabla_{\gamma'(t)} s = 2i\pi \langle s^* \alpha_t, \frac{d}{dt} \rangle s(t) = 2i\pi \langle \alpha_s(t), s'(t) \rangle \quad ,$$

donc s est autoparallèle si et seulement si $\langle \alpha, s'(t) \rangle = 0 \quad \forall t \in [a, b]$.

Si s est autoparallèle, cs est autoparallèle pour tout $c \in \mathbb{C}$.

Courbes horizontales

Pour $q \in L^*$ on peut écrire $L_q^{*\mathbb{R}} = V_q \oplus H_q$ avec

$$V_q = (L_{\pi q}^*)^{\mathbb{R}}_q \quad , \quad H_q = \{v \in L_q^{*\mathbb{R}} \mid \langle \alpha_q, v \rangle = 0\} \quad ,$$

$s : [a, b] \rightarrow L^*$ est autoparallèle au-dessus de $\gamma : \pi \circ s$ si et seulement si $s'(t) \in H_{s(t)} \quad \forall t \in [a, b]$: s est une courbe horizontale dans L^* .

Remarque : la décomposition $L_q^{\text{MR}} = V_q \oplus H_q$ détermine complètement α .

Transport parallèle

Proposition : soit $(L\alpha)$ un F.L.C. sur X et $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ une courbe.

Il existe une et une seule section $s : [ab] \rightarrow L$ au-dessus de γ telle que

i - s est autoparallèle

ii - $s(a) = q \in L_{\gamma(a)}$

Ceci permet de définir une application $\hat{\gamma} : L_{\gamma(a)} \rightarrow L_{\gamma(b)}$ par $\hat{\gamma}(q) = s(b)$ avec $s(a) = q$

- $\hat{\gamma}$ est linéaire et bijectif

- $\hat{\gamma}$ est indépendant du paramétrage de la courbe $\gamma = \gamma([ab])$

$$(s(a) = f(a)s_i(a), s(b) = f(b)s_i(b), f(b) = f(a)e^{-2i\pi \int_{\gamma} \alpha_i},$$

avec $s_i : U_i \rightarrow L^*, \alpha_i = s_i^* \alpha, \gamma([ab]) \subset U_i$.

$\hat{\gamma}$ est le transport parallèle dans L le long de γ dans X .

Remarque : si $s(a) \neq 0$ alors $s(t) \neq 0 \quad \forall t \in [ab]$.

Transport parallèle le long des courbes fermées

On désigne par Γ l'ensemble des courbes fermées (différentiables par morceaux) dans X . Pour $\gamma \in \Gamma$, $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ on a $\gamma(a) = \gamma(b)$ donc $\hat{\gamma}$ est un automorphisme de $L_{\gamma(a)} = L_{\gamma(b)}$ donc il existe $c \in \mathcal{C}$ tel que $\hat{\gamma}(u) = cu \quad \forall u \in L_{\gamma(a)}$ on pose $c = (L, \alpha)(\gamma) \in \mathcal{C}^*$.

Proposition : soient $(L\alpha), (L'\alpha')$ deux F.L.C. sur X on a $(L\alpha)(\gamma) = (L'\alpha')(\gamma) \quad \forall \gamma \in \Gamma$ si et seulement si $[(L\alpha)] = [(L'\alpha')] = 1 \in \mathfrak{L}_w$. Pour tout $1 \in \mathfrak{L}_w$ on définit $\hat{1} : \Gamma \rightarrow \mathcal{C}^*$ par

$$\hat{1}(\gamma) = (L\alpha)(\gamma) \quad \text{avec} \quad [(L\alpha)] = 1, \gamma \in \Gamma.$$

Lemme : pour $z \in H^1(X, \mathcal{C}^*) \simeq \text{Hom}(\pi_1(X), \mathcal{C}^*)$,
on définit $\hat{z} : \Gamma \rightarrow \mathcal{C}^*$ par $\hat{z}(\gamma) = z([\gamma])$ où $[\gamma] \in \pi_1(x)$

est la classe d'homotopie de γ .

On note $z1 \in \mathcal{L}_\omega$ le transformé de $1 \in \mathcal{L}_\omega$ par z , alors

$$\widehat{z1}(\gamma) = \hat{z}(\gamma) \hat{1}(\gamma) \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Théorème : si $\gamma \in \Gamma$ est tel que $0 = [\gamma] \in \pi_1(X)$, $\hat{1}(\gamma)$
est indépendant de $1 \in \mathcal{L}_\omega$.

En fait, il existe $S : D \rightarrow X$ $S|_{\partial D} = \gamma$ ($D = [01] \times [01]$)

et $\forall 1 \in \mathcal{L}_\omega$ $\hat{1}(\gamma) = e^{-2i\pi \int_{S(D)} \omega}$.

Sous variétés absolument parallèles

Soit (L_α) un F.L.C. sur X et $Y \subset X$ une sous variété. Y est dite absolument parallèle (relativement à (L_α)) si pour tout $\gamma : [ab] \rightarrow Y$ tel que $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$ le transport parallèle $\hat{\gamma} : L_p \rightarrow L_q$ ne dépend que de p et q ($\hat{1}(\gamma) = 1 \quad \forall \gamma \in \Gamma(Y)$). Si Y est absolument parallèle, il existe donc un isomorphisme canonique $\hat{\gamma}_{pq} : L_p \rightarrow L_q$ et $L|_Y$ est trivial: $L|_Y \simeq Y \times \mathcal{C}$.

Exemple : si Y est simplement connexe et $\omega|_Y = 0$, Y est absolument parallèle relativement à 1 , $\forall 1 \in \mathcal{L}_\omega$.

II.4 Structures hermitiennes (S.H.)

Une S.H. $|V|$ sur un espace vectoriel complexe V est une forme $\mathbb{R}$ -bilinéaire sur V telle que

$$\begin{aligned} (u, v) &= \overline{(v, u)} \quad \forall u, v \in V \\ (u, u) &= |u|^2 > 0 \quad \forall u \in V \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Définition : soit L un F.L. sur X , une S.H. $|L|$ est définie par la donnée pour tout $x \in X$ d'une S.H. $|L_x|$ sur L_x telle que la fonction

$x \mapsto (s(x), s(x))$ soit différentiable pour toute section s différentiable.

Définition : soit (L, α) un F.L.C. sur X , une S.H. $|L|$ sur L est invariante par parallélisme (relativement à α) si $\forall \gamma : [a, b] \rightarrow X$ et $\forall s : [a, b] \rightarrow L$ autoparallèle au-dessus de γ la fonction $t \mapsto |s(t)|$ est constante sur $[a, b]$.

Lemme : $|L|$ est invariante par parallélisme si et seulement si

$$\xi(s, t) = (\nabla_{\xi} s, t) + (s, \nabla_{\xi} t), \forall \xi \in U^{\mathbb{R}}(X), \forall s, t \in S.$$

Proposition : soit (L, α) un F.L.C. sur X . Il existe une S.H. invariante $|L|$ sur L si et seulement si $\hat{1}(\Gamma) \subset T^4$, $|L|$ est alors déterminée à une constante globale près. ($T^4 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$)

Corollaire : s'il existe une S.H. invariante sur L , ω est réelle.

On pose

$$\mathcal{K}_{\omega}^{[L]} = \{l \in \mathcal{L}_{\omega}^{[L]} \mid \hat{1}(\Gamma) \subset T^4\}$$

$$\mathcal{K}_{\omega} = \{l \in \mathcal{L}_{\omega} \mid \hat{1}(\Gamma) \subset T^4\}$$

Théorème : si $\omega \in \Omega_2^{\mathbb{R}}(X)$, $d\omega = 0$, $[\omega]$ entière.

$\mathcal{K}_{\omega}^{[L]}$ (donc $\mathcal{K}_{\omega}$) est non vide si $i_*[L] = [\omega]$.

$\pi_1(X)^{\wedge} = H^1(X, T^4) \subset H^1(X, \mathbb{C})$ agit de façon simplement transitive sur $\mathcal{K}_{\omega}$.

$e_* H^1(X, \mathbb{R}) \subset H^1(X, T^4)$ agit de façon simplement transitive sur $\mathcal{K}_{\omega}^{[L]}$

($\forall [L] \text{ t.q. } i_*[L] = [\omega]$).

Lemme : soit (L, α) un F.L.C. sur X tel que $[(L, \alpha)] \in \mathcal{K}_{\omega}$ et $|L|$ une S.H. invariante sur L , soit $\{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement contractible de X et $s_i : U_i \rightarrow L^*$ une famille de sections, on a

$$\frac{1}{2i\pi} \frac{d|s_i|^2}{|s_i|^2} = \alpha_i - \overline{\alpha_i} \quad (\alpha_i = s_i^* \alpha).$$

Cas d'une variété symplectique

Soit (X, ω) une variété symplectique, (L, α) un F.L.C. sur X tel que $[(L, \alpha)] \in \mathcal{K}_\omega$ et $|L|$ une S.H. invariante. On désigne par S_c l'espace vectoriel des sections différentiables à support compact de L , on munit S_c du produit scalaire.

$$\begin{aligned} \{s, t\} &= \int (s, t) \omega^n \quad (\dim X = 2n) \\ \|s\|^2 &= \int |s|^2 \omega^n, \end{aligned}$$

S_c est un espace préhilbertien séparé.

II.5 L'action de $C(X)$ sur S

Soient (X, ω) une variété symplectique telle que $[\omega]$ soit entière et (L, α) un F.L.C. sur X tel que $[(L, \alpha)] \in \mathcal{L}_\omega$.

Pour tout $\xi \in U(X)$, ∇_ξ est un endomorphisme de l'espace vectoriel S des sections $s : X \rightarrow L$, mais

Lemme : $([\nabla_\xi, \nabla_\eta] - \nabla_{[\xi, \eta]})s = 2i\pi \omega(\xi, \eta)s \quad \forall s \in S \quad \xi, \eta \in U$,
donc $\nabla : U(X) \rightarrow \text{End } S$ n'est pas un homomorphisme d'algèbres de Lie (sa restriction à $\mathcal{U} \subset U$ n'est en général pas non plus un homomorphisme).

Théorème : on définit $v : C(X) \rightarrow \text{End } S$ par

$$v(\varphi)s = \nabla_{\gamma(\varphi)}s + 2i\pi \varphi s \quad \varphi \in C \quad s \in S,$$

($\gamma : C \rightarrow \mathcal{U}$ est l'homomorphisme déjà introduit),
 v est un homomorphisme d'algèbres de Lie.

Remarque : les opérateurs $\nabla_{\gamma(\varphi)}$ et $2i\pi \varphi$ commutent.

Lemme : si $[(L, \alpha)] \in \mathcal{K}_\omega$ soit $|L|$ une S.H. invariante sur L et soit $s, t \rightsquigarrow \{s, t\} = \int (s, t) \omega^n$ le produit scalaire défini sur S_c , on a

$$\{v(\varphi)s, t\} + \{s, v(\overline{\varphi})t\} = 0 \quad s, t \in S_c, \quad \varphi \in C.$$

Remarque : si le groupe de Lie G est fortement symplectique sur (X, ω) et si $\sigma: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ admet un relèvement $\lambda: \mathcal{G} \rightarrow C(X)$, $\nu_0 \lambda: \mathcal{G} \rightarrow \text{End } S$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie.

II.6 Fonctions et champs de vecteurs sur L^*

Soient (L, X, σ) un F.L. sur X et (L^*, X, π) le fibré principal associé. $\mathcal{C}^*$ agit sur L^* donc sur $C\mathcal{C}(L^*)$ par

$$(c.f)(q) = f(c^{-1}q) \quad q \in L, c \in C, f \in C\mathcal{C}(L^*) .$$

La bijection $S \rightarrow \tilde{S}$

On pose $\tilde{S} = \{f \in C\mathcal{C}(L^*) ; c.f = cf, \forall c \in \mathcal{C}^*\}$ (i.e. $f(c^{-1}q) = cf(q)$) l'application $S \rightarrow \tilde{S}$ ($s \rightarrow \tilde{s}$) définie par $\tilde{s}(q)q = s(\pi(q)) \quad q \in L^*, s \in S$ est une bijection linéaire.

La bijection $C \rightarrow \tilde{C}$

On pose $\tilde{C} = \{f \in C\mathcal{C}(L^*) ; c.f = f \forall c \in \mathcal{C}^*\}$, l'application $C = C(X) \rightarrow \tilde{C}$ définie par $\varphi \mapsto \tilde{\varphi} = \varphi_0 \pi(\varphi \in C)$ est un isomorphisme d'algèbres. De plus $\tilde{\varphi}s = \tilde{\varphi} \tilde{s}$.

Champs de vecteurs $\mathcal{C}^*$ -invariants sur L^*

Pour $\eta \in U(L^*)$ on définit $c.\eta$ par $(c.\eta)f = c.[\eta(c^{-1}.f)]$ $\forall f \in C(L^*)$, $c \in \mathcal{C}^*$ - On pose $\mathcal{K} = \{\eta \in U^R(L^*) ; c.\eta = \eta, \forall c \in \mathcal{C}^*\}$, $\mathcal{K}$ est une algèbre de Lie. $\tilde{S}$ et $\tilde{C}$ sont $\mathcal{K}$ -stables.

Si (L, α) est un F.L.C. sur X , on a la décomposition $(L^*)^R_q = V_q \oplus H_q$.

On pose

$$\mathcal{K}_H = \{\eta \in \mathcal{K}, \eta_q \in H_q \quad \forall q \in L^*\}, \quad \mathcal{K}_V = \{\eta \in \mathcal{K}; \eta_q \in V_q, \forall q \in L^*\},$$

on a $\mathcal{K} = \mathcal{K}_H \oplus \mathcal{K}_V$ ($\mathcal{K}_V$ est un idéal abélien de $\mathcal{K}$).

La bijection $U^R(X) \rightarrow \mathcal{K}_H$

Si $\xi \in U^R(X)$ on désigne par $\tilde{\xi}$ l'unique champ de vecteurs sur L^* tel que $\pi_* \tilde{\xi}_q = \xi_{\pi q}$, $\forall q \in L^*$, et $\tilde{\xi} \in \mathcal{K}_H$. L'application $\xi \mapsto \tilde{\xi}$ est une bijection. $U^R(X) \rightarrow \mathcal{K}_H$

D'autre part $\forall s \in S$ on a $\tilde{V}_{\tilde{\xi}} s = \tilde{\xi} \tilde{s}$

La bijection $C(X) \rightarrow \mathcal{K}_V$

Pour tout $\varphi \in C(X)$ on définit $\eta(\varphi) \in U(L^*)$ par

$$(\eta(\varphi)f)(q) = \left. \frac{d}{dt} f(e^{-2i\pi \tilde{\varphi}(q)t} q) \right|_{t=0} \quad f \in C(L^*) \quad q \in L^*,$$

on a $\eta(\varphi) \in \mathcal{K}_V$ et $\eta: C(X) \rightarrow \mathcal{K}_V$ est une bijection.

$$\text{On a } \eta(\varphi) \tilde{s} = 2i\pi \tilde{\varphi} \tilde{s} \quad \forall \tilde{s} \in \tilde{S}.$$

Corollaire : l'application $(\xi, \varphi) \mapsto \eta(\xi, \varphi) = \tilde{\xi} + \eta(\varphi)$ définit une bijection $\eta: U^R(X) \times C(X) \rightarrow \mathcal{K}$,
et $\forall s \in S \quad \eta(\xi, \varphi) \tilde{s} = (\tilde{V}_{\tilde{\xi}} s + 2i\pi \varphi s)^\sim$.

On suppose maintenant (X, ω) symplectique et $[(L\alpha)] \in \mathcal{L}_\omega$.

Proposition : soient $\varphi \in C(X)$, $\xi \in U^R(X)$, on a $\xi = \gamma(\varphi)$ si et seulement si $\theta\{\eta(\xi, \varphi)\}\alpha = 0$.

Lemme : l'application $C(X) \rightarrow \mathcal{K}$ définie par $\varphi \mapsto \eta(\gamma(\varphi), \varphi)$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie (injectif).

II.7 Relèvement de l'action de G sur X en une action de G sur L

Soient (X, ω) une variété symplectique, (L, α) un F.L.C. sur X tel que $[(L, \alpha)] \in \mathcal{L}_\omega$ et G un groupe de Lie connexe, simplement connexe qui agit de façon symplectique sur X.

Définition : on dit que l'action $G \times X \rightarrow X$ se relève en une action $G \times L^* \rightarrow L^*$, s'il existe une action de G sur L^* tel que

- i) $\pi(gq) = g\pi(q) \quad \forall g \in G \quad \forall q \in L^*$
- ii) $c(gq) = g(cq) \quad \forall g \in G \quad \forall q \in L^* \quad \forall c \in C^*$
- iii) α est G-invariante.

Si ces conditions sont réalisées

G agit sur $C(L^*)$ par $(gf)(q) = f(g^{-1}q) \quad f \in C(L^*), \quad g \in G, \quad q \in L^*.$

$\tilde{S} \subset C(L^*)$ est G-stable donc G agit sur S : $\tilde{g}s = g\tilde{s}.$

On a $(gs)(x) = gs(g^{-1}x) ; x \in X, \quad g \in G, \quad s \in S.$

Proposition : l'action de G sur X se relève en une action de G sur L^* si et seulement si G est fortement symplectique sur (X, ω) et $\sigma : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{U}$ admet un relèvement $\lambda : \mathcal{G} \rightarrow C.$

Remarque - si $\zeta : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{K}$ est l'homomorphisme défini par l'action de $\mathcal{G}$ sur L^* on a : $\zeta(\xi) = \eta(\sigma(\xi), \lambda(\xi)) \quad \forall \xi \in \mathcal{G}.$

- l'action de G sur L^* est définie par

$$(e^{t\xi})_q = (e^{t\eta(\lambda(\xi))})(e^{t\tilde{\sigma}(\xi)})_q \quad \forall \xi \in \mathcal{G} \quad q \in L^*,$$

où $e^{t\eta(\lambda(\xi))}$ et $e^{t\tilde{\sigma}(\xi)}$ commutent et sont définis par

$$- (e^{t\eta(\varphi)})_q = e^{2i\pi \tilde{\varphi}(q)t}_q \quad (\varphi \in C(X)) .$$

$$- (e^{t\tilde{\sigma}(\xi)})_q = \hat{\gamma}q \quad \text{avec} \quad \gamma : [0, t] \rightarrow X, \quad \gamma(\tau) = (e^{\tau\sigma(\xi)})_{\pi(q)}.$$

Corollaire : si $s \in S$, on a $\frac{d}{dt}(e^{t\xi}s)|_{t=0} = (V_{\sigma(\xi)} + 2i\pi\lambda(\xi))s$, $\xi \in \mathcal{G}$.

La représentation unitaire de G dans l'espace des sections

Soit (X, ω) une variété symplectique telle que $[\omega]$ soit entière
 (L, α) un F.L.C. sur X tel que $l = [L, \alpha] \in \mathcal{H}_{\omega}$;
 $|L|$ une S.H. invariante sur L .

S_c l'espace des sections $s : X \rightarrow L$ à support compact est muni du produit scalaire $\{s, t\} = \int (s, t)\omega^n$; V_1 le complété de S_c pour la norme $\|s\| = \{s, s\}^{1/2}$ (V_1 s'identifie à l'espace des classes de sections mesurables et de carré sommable).

G un groupe de Lie connexe, simplement connexe fortement symplectique sur (X, ω) . On suppose que l'homomorphisme $\sigma : \mathcal{G} \rightarrow \mathfrak{U}$ admet un relèvement $\lambda : \mathcal{G} \rightarrow C(X)$ tel que $\lambda(\mathcal{G}) \subset C^{\mathbb{R}}(X)$.

On définit

$$\beta_1(g)s = gs \quad g \in G, \quad s \in V_1.$$

Théorème : (β_1, V_1) est une représentation unitaire continue qui ne dépend que de l (à λ fixé) à l'équivalence unitaire près.

Remarque : si $\sigma : \mathcal{G} \rightarrow \mathfrak{U}$ admet un relèvement, il en existe toujours un : $\lambda : \mathcal{G} \rightarrow C$ tel que $\lambda(\mathcal{G}) \subset C^{\mathbb{R}}$, mais si λ n'est pas unique il existe des relèvements non réels. (La condition $\lambda(\mathcal{G}) \subset C^{\mathbb{R}}$ est nécessaire pour que $|gs| = |g|s$, $\forall g \in G, s \in L^*$ et donc que $\|gs\| = \|s\|$, $g \in G, s \in S_c$).

La représentation (β_1, V_1) dépend du choix de λ . En fait si λ et λ' sont deux relèvements réels, on a $f = \lambda - \lambda' \in \text{Hom}(\mathcal{G}, \mathbb{R})$ donc il existe $\rho_f \in \text{Hom}(G, T^1)$ tel que $d\rho_f = 2i\pi f$, on vérifie que

$$\beta_1^{(\lambda)}(g) = \rho_{(\lambda - \lambda')}(g) \beta_1^{(\lambda')}(g) \quad \forall g \in G.$$

III.1 Variétés kählériennes (rappels)

- Structure presque complexe sur un espace vectoriel

Définition : Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $j \in \text{End } E$ est une structure presque complexe si $j^2 = -1$.
(S'il existe sur E une structure presque complexe, E est de dimension paire).

Si l'on pose $F = \{v \in E^{\mathcal{C}}, j^{\mathcal{C}} v = iv\}$ on a $E^{\mathcal{C}} = F \oplus \bar{F}$
($E^{\mathcal{C}} = E \otimes \mathcal{C}$; $j^{\mathcal{C}}(e \otimes \alpha) = j e \otimes \alpha$; $\overline{(e \otimes \alpha)} = e \otimes \bar{\alpha}$, $e \in E$, $\alpha \in \mathcal{C}$).

Réciproquement, si E est un espace vectoriel réel de dimension finie tel qu'il existe un sous espace complexe F de $E^{\mathcal{C}}$ tel que $E^{\mathcal{C}} = F \oplus \bar{F}$, alors il existe $j \in \text{End } E$ (unique) tel que

$$j^2 = -1 \quad F = \{v \in E^{\mathcal{C}}, j^{\mathcal{C}} v = iv\}$$

et l'on a $j(u + \bar{u}) = i(u - \bar{u}) \quad \forall u \in F$

- Variétés presque complexes

Définition : Soit X une variété réelle de dimension $2n$, une structure presque complexe j sur X est un champ de tenseurs de type $(1,1)$

$$j : x \rightsquigarrow j_x \in \text{End}(X_x) \quad x \in X$$

tel que i) $j_x^2 = -1 \quad \forall x \in X$ ii) j est différentiable

j définit (et réciproquement) une distribution complexe différentiable.

$$F : x \rightsquigarrow F_x \subset X_x^{\mathcal{C}} \quad x \in X$$

telle que $X_x^{\mathcal{C}} = F_x \oplus \bar{F}_x \quad \forall x$.

On notera (X, j) ou (X, F) une variété presque complexe.

Définition : Soit (X, F) une variété presque complexe, une fonction $\varphi \in C(X)$ est holomorphe (relativement à F) si $\xi\varphi = 0 \quad \forall \xi \in U_F(X)$
où $U_F(X) = \{\xi \in U^\mathcal{C}(X); \xi_x \in F_x, \quad \forall x \in X\}$

Définition : Une variété presque complexe (X, F) est dite complexe si F est involutive ($[\xi, \eta] \in U_F, \quad \forall \xi, \eta \in U_F$)

Théorème : Soit (X, F) une variété presque complexe ($\dim_{\mathbb{R}} X = 2n$)
 (X, F) est complexe si et seulement si pour tout $x \in X$ il existe un voisinage ouvert U de x et n fonctions holomorphes $z_1, \dots, z_n \in C^\mathcal{C}(U)$ telles que, $\forall y \in U : (dz_1)_y, \dots, (dz_n)_y$ sont $\mathcal{C}$ -linéairement indépendants.

Remarque : $(-\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1})_y, \dots, (-\frac{\partial}{\partial \bar{z}_n})_y$ forment alors une base de F_y .

- Variétés kählériennes

Définition : (X, ω, F) est une variété kählérienne si

- i - (X, ω) est une variété symplectique
- ii - (X, F) est une variété complexe
- iii - $\omega_x \Big|_{F_x} = 0 \quad \forall x \in X$

Proposition : Soit (X, ω, F) un triplet vérifiant i - et ii -,
soit $j : x \rightsquigarrow j_x \in \text{End}(T_x)$ défini par F , alors iii - est équivalent à

$$\text{iii}' - \omega(j\xi, j\eta) = \omega(\xi, \eta) \quad \forall \xi, \eta \in U(X)$$

III.2 Polarisation d'une variété symplectique

Définition : Soit (X, ω) une variété symplectique ($\dim_{\mathbb{R}} X = 2n$), une polarisation de (X, ω) est une distribution complexe (différentiable)
 $F : x \rightsquigarrow F_x \subset T_x^\mathcal{C}(x \in X)$ de dimension n ($\dim_{\mathcal{C}} F_x = n, \quad \forall x \in X$) telle que

$$\text{i} - \omega_x \Big|_{F_x} = 0 \quad \forall x \in X$$

$$\text{ii} - F \text{ est involutive } (U_F \text{ est une algèbre de Lie})$$

Remarque : Si F est une polarisation, $\bar{F}$ est une polarisation ($\bar{F}: x \rightsquigarrow \bar{F}_x$)

Définitions : Soit F une polarisation de (X, ω)

F est réelle si $F = \bar{F}$ ($F_x = F_x^{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$, $F_x^{\mathbb{R}} \subset X_x^{\mathbb{R}}$ $\forall x \in X$)

F est kählérienne si $F \cap \bar{F} = \{0\}$ ($F_x \cap \bar{F}_x = \{0\} \Rightarrow X_x^{\mathbb{C}} = F_x \oplus \bar{F}_x$)

Lemme : Soit (X, ω, F) une variété symplectique polarisée ; (X, ω, F) est une variété kählérienne si et seulement si F est une polarisation kählérienne de (X, ω) .

L'algèbre C_F

Soit (X, ω, F) une variété symplectique polarisée, on pose

$$C_F = \{\varphi \in C(X) ; \xi \varphi = 0, \forall \xi \in U_F\}$$

Lemme : Soit $\varphi \in C(X)$; on a $\varphi \in C_F$ si et seulement si $\gamma(\varphi) \in U_F$
(γ est l'homomorphisme $0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow C \xrightarrow{\gamma} \mathfrak{U} \rightarrow 0$)

Proposition : C_F est une sous algèbre de Lie abélienne de C .

La condition (A)

Soit (X, ω, F) une variété symplectique polarisée, ($\dim X = 2n$), on désigne par (A) la condition suivante :

$\forall x \in X$ il existe un voisinage U de x et n fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C_F(U)$ telles que $(d\varphi_1)_x, \dots, (d\varphi_n)_x$ sont $\mathbb{C}$ -linéairement indépendants.

L'algèbre C_F^1

Soit (X, ω, F) une variété symplectique polarisée, pour tout $k = 0, 1, 2, \dots$ On pose :

$$C_F^k = \{\varphi \in C(X) ; [\varphi_1 \dots [\varphi_{k+1} \varphi] \dots] \Big|_U = 0, \forall \varphi_i \in C_F(U), \forall U \text{ ouvert dans } X\}$$

On a $C_F^k \subset C_F^{k+1}$ et $[C_F^k, C_F] \subset C_F^{k-1}$

Lemme : Si (A) est vrai $C_F^0 = C_F$.

Proposition : Si (A) est vrai $[C_F^k, C_F^1] \subset C_F^{k+1-1}$ ($C_F^{-1} = \{0\}$)

Corollaire : Si (A) est vrai $[C_F^1, C_F^k] \subset C_F^k \quad \forall k$ en particulier

- C_F^1 est une sous algèbre de Lie de C
- C_F est un idéal abélien de C_F^1 .

Proposition : Soit $\varphi \in C$ telle que $\gamma(\varphi)$ engendre un groupe global à un paramètre $\{\exp t\gamma(\varphi), t \in \mathbb{R}\}$. Si (A) est vrai

$$(\exp t \gamma(\varphi)) * F = F \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{si et seulement si} \quad \varphi \in C_F^1$$

Exemple : Soient $X = T^*M$ et $\sigma : X \rightarrow M$ la projection canonique, ω la 2-forme canonique sur X et F la distribution définie par $F_x = (X_{\sigma_x})_x^\perp$ avec $X_{\sigma_x} = \sigma^{-1}(\sigma_x) = M_{\sigma_x}^*$.

(X, ω, F) est une variété symplectique polarisée, F est une polarisation réelle. Avec les coordonnées locales p_i, q^i introduites en (I.3), la condition (A) est vraie (avec par exemple $\varphi_i = q^i$), les $(\partial/\partial p_i)_x$ forment une base de F_x .

$$C_F = \{\varphi \in C(X) ; \varphi(p, q) = \hat{\varphi}(q)\}$$

$$C_F^1 = \{\varphi \in C(X) ; \varphi(p, q) = \sum_i p_i \hat{\varphi}^i(q) + \hat{\varphi}(q)\}$$

Polarisations admissibles

Définition : Soit (X, ω, F) une variété symplectique polarisée ($\dim X = 2n$), F est une polarisation admissible si

$$i - \dim(F_x \cap \overline{F}_x) = k \text{ est indépendant de } x \in X$$

(donc $x \rightsquigarrow F_x \cap \bar{F}_x$ définit une distribution involutive de dimension k).

ii - $x \rightsquigarrow F_x + \bar{F}_x$ est une distribution involutive de dimension $(2n-k)$.

Théorème : soit (X, ω_F) une variété symplectique polarisée telle que F soit admissible, alors (A) est vrai et de plus, pour tout $x \in X$, il existe un système de fonctions $u_1 \dots u_k, z_1 \dots z_{n-k}$ définies dans un voisinage ouvert de x telles que

- i - $u_1 \dots u_k$ sont réelles
- ii - $du_1, \dots, du_k, dz_1, \dots, dz_{n-k}$ sont $\mathbb{C}$ linéairement indépendants en x .
- iii - $du_1, \dots, du_k, dz_1, \dots, dz_{n-k}$ forment une base de $F_x^\perp \subset (X_x^\mathbb{C})^*$

III.3 Fibrations

Soit X une variété réelle de dimension n et D une distribution involutive réelle de dimension k sur X .

Une sous-variété $Y \subset X$ est une variété intégrale de D si $Y_y \subset D_y \quad \forall y \in Y$.

Définition : Deux points $x, y \in X$ sont D -équivalents ($x Dy$) s'ils sont contenus dans une même variété intégrale de D , $x Dy$ est une relation d'équivalence. On désigne par X/D le quotient et par $\rho_D : X \rightarrow X/D$ la projection canonique. Pour $p \in X/D$ on note D_p la classe d'équivalence correspondante ($X = \bigcup_{p \in X/D} D_p$).

On pose $C(X/D) = \{ \varphi : X/D \rightarrow \mathbb{C}; \varphi_0 \rho_D \in C^\infty(X) \}$

Définition : Une distribution réelle involutive D sur X est une fibration s'il existe sur X/D une structure de variété différentiable telle que

- i - $C^\infty(X/D) = C(X/D)$
- ii - $\rho_D : X \rightarrow X/D$ est un fibré

- Remarques : S'il existe une telle structure, elle est unique (d'après i)
- Si D est une fibration, D_p est fermé dans X , $\forall p \in X/D$
 - Quelle que soit D , $\forall x \in X$ il existe un voisinage ouvert U de x tel que D est une fibration sur U .

III.4 Polarisations fortement admissibles

Définitions : Soit (X, ω, F) une variété symplectique polarisée ($\dim X = 2n$) telle que F est admissible. On définit les distributions réelles involutives :

$$D : x \rightarrow D_x \quad (x \in X) \quad D_x = F_x \cap X_x^{\mathbb{R}} = \overline{F}_x \cap X_x^{\mathbb{R}}$$

$$E : x \rightarrow E_x \quad E_x = (F_x + \overline{F}_x) \cap X_x^{\mathbb{R}}$$

On a $\{0\} \subset D_x \subset E_x \subset X_x \quad \forall x \in X$, et

$$\dim D_x = k \quad \dim X_x/E_x = k \quad \dim E_x/D_x = 2(n-k)$$

$$(k = \dim_{\mathbb{C}} F_x \cap \overline{F}_x, \quad \forall x \in X)$$

F est réelle si et seulement si $D = E$

F est kähliérienne si et seulement si $D = \{0\}$

(équivalent à $E_x = X_x \quad \forall x \in X$)

Proposition : Pour tout $x \in X$, E_x est l'orthogonal de D_x pour la forme ω_x .

Corollaire : ω_x définit une forme bilinéaire alternée non dégénérée $\overline{\omega}_x$ sur E_x/D_x .

On suppose que D et E sont des fibrations et que l'application induite $\rho_{E/D} : X/D \rightarrow X/E$ définit un fibré, alors on a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \rho_D \downarrow & \searrow \rho_E & \\ X/D & \xrightarrow{\rho_{E/D}} & X/E \end{array}$$

On dit que $\rho_D : X \rightarrow X/D$ est la partie réelle de (X, ω, F) et que $\rho_{E/D} : X/D \rightarrow X/E$ est la partie kählérienne de (X, ω, F) .

Soit $r \in X/E$. $\forall x \in E_r = \rho_E^{-1}(r)$ on définit l'isomorphisme linéaire :

$$\delta_x : (X/E)_r^* \rightarrow D_x$$

par

$$\omega_x(\delta_x(b), v) = \langle b, (\varphi_E)_* v \rangle \quad b \in (X/E)_r^* \quad v \in X_x$$

Pour tout $b \in (X/E)_r^*$, on définit le champ de vecteurs $\delta_r(b)$ sur E_r par :

$$(\delta_r(b))_x = \delta_x(b) \in D_x \subset E_x \quad x \in E_r$$

Proposition : $\delta_r((X/E)_r^*)$ est une sous algèbre de Lie commutative de $U(E_r)$. Si $0 \neq b \in (X/E)_r^*$, $\delta_r(b)$ ne s'annule pas sur E_r ; $\delta_r((X/E)_r^*)_x = D_x$ $\forall x \in E_r$.

Remarque : Si $\varphi \in C(X/E)$ on a $\delta_r((d\varphi)_r) = \gamma(\varphi_0 \rho_E)|_{E_r}$.

Définition : Une polarisation admissible F sur une variété symplectique (X, ω) est dite fortement admissible si

- i - D et E sont des fibrations
- ii - $\rho_{E/D} : X/D \rightarrow X/E$ définit un fibré
- iii - $\forall r \in X/E$ l'homomorphisme d'algèbres de Lie

$\delta_r : \mathbb{R}^k \simeq (X/E)_r \rightarrow U(E_r)$ s'intègre en une action du groupe $\mathbb{R}^k$ sur E_r .

Définition : Une polarisation F d'une variété symplectique (X, ω) est très fortement admissible si elle est fortement admissible et si de plus $\forall r \in X/E$ l'action du groupe $\mathbb{R}^k$ sur E_r est simplement transitive sur D_p , $\forall p \in (X/E)_r = \rho_{E/D}^{-1}(r) = (E_r = \bigcup_{p \in (E/D)_r} D_p)$.

Lemme : On suppose que F est une polarisation fortement admissible de (X, ω) , $\forall r \in X/E$ on définit sur $(E/D)_r$ la 2-forme $\bar{\omega}_r$ et la structure presque complexe j_r comme suit :

Soient $p \in (E/D)_r$ et $x \in D_p$:

- $\bar{\omega}_x$ est la forme bilinéaire définie sur E_x/D_x par ω_x .

- j_x est la structure presque complexe définie sur E_x/D_x par la décomposition $(E_x/D_x)^{\mathcal{C}} = F_x/D_x^{\mathcal{C}} \oplus \bar{F}_x/D_x^{\mathcal{C}}$; $(\bar{\omega}_r)_p$ et $(j_r)_p$ sont les transportés de $\bar{\omega}_x$ et j_x par l'isomorphisme canonique $E_x/D_x \rightarrow ((E/D)_r)_p$ ($(\bar{\omega}_r)_p$ et $(j_r)_p$ sont indépendants de $x \in D_p$ par suite de l'action de $\mathbb{R}^k$ sur D_p).

Alors $((E/D)_r, \bar{\omega}_r, j_r)$ est une variété kählérienne.

IV.1 L'action de C_F^1 sur S_F

Soient $(X_{\omega F})$ une variété symplectique polarisée (F-admissible)
 $(L\alpha)$ un F.L.C. sur X tel que $[(L\alpha)] \in \mathcal{L}_{\omega}$.

Définition : On pose :

$$S_F = \{s \in S ; \nabla_{\xi} s = 0 \quad \forall \xi \in U_F\}$$

(si $s \in S_F$ on dit que s est constante le long de F).

Remarque : si $s \in S_F$, $t = \varphi s$ ($\varphi \in C$) on a $t \in S_F \Leftrightarrow \varphi \in C_F$

Lemme : Si $\varphi \in C(X)$ et $\xi \in U(X)$, on a :

$$[\nu(\varphi), \nabla_{\xi}] = [(\nabla_{\gamma(\varphi)} + 2i\pi \varphi), \nabla_{\xi}] = \nabla_{[\gamma(\varphi), \xi]}$$

Proposition : S_F est $\nu(C_F^1)$ -stable. Soit $\nu : C_F^1 \rightarrow \text{End } S_F$

Remarque : Si $\varphi \in C_F \subset C_F^1$, $\nu(\varphi)s = 2i\pi \varphi s$, $s \in S_F$

Exemple 1 : Si $(X_{\omega F})$ est une variété kählérienne, S_F est l'espace des sections holomorphes de $(L\alpha)$.

Exemple 2 : Si $X = T^*M$ et $(X_{\omega F})$ comme dans l'exemple (III.2), S_F est l'espace des sections autoparallèles au-dessus de M_m^* , $m \in M$ (chaque M_m^* est une sous-variété absolument parallèle de X, pour tout $l \in \mathcal{L}_{\omega}$)
 $s \in S_F$ est donc complètement déterminée par ses valeurs sur $M \subset X$
 $(m \rightsquigarrow 0 \in M_m^*)$ S_F s'identifie à $S(L|_M)$.

Soit $\sigma^{-1} U_k$ ($U_k \subset M$, $\sigma : X \rightarrow M$) le domaine d'une carte q^i , p_i ,

on suppose U_k contractible et :

soit $s_k : \sigma^{-1} U_k \rightarrow L^*$, telle que $s_k^* \alpha = p_i dq^i$, alors $s_k \in S_F(\sigma^{-1} U_k)$.

Soit $s = f_k s_k$, on a :

$$s \in S_F \Leftrightarrow \frac{\partial f_k}{\partial p_i} = 0$$

où $f_k(p, q) = \hat{f}_k(q) \quad (\hat{f}_k \in C^\infty(U_k))$

Si $\varphi \in C_F^1$, on a $\varphi(p, q) = \sum_i p_i \hat{\varphi}^i(q) + \hat{\varphi}(q)$ et $v(\varphi)s = g_k s_k$ avec

$$\hat{g}_k(q) = - \sum_i \hat{\varphi}^i(q) \frac{\partial \hat{f}_k}{\partial q^i}(q) + 2i\pi \hat{\varphi}(q) \hat{f}_k(q)$$

Remarque : $\exists ! l \in \mathcal{L}_\omega$ tel que $\exists s : X \rightarrow L^*, s^* \alpha \Big|_{U_k} = p_i dq^i \quad \forall U_k$
($s^* \alpha = \beta$ canonique).

Action d'un groupe sur S_F

Soit G un groupe de Lie connexe, simplement connexe, fortement symplectique sur (X, ω) , on suppose que $\sigma : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{U}$ admet un relèvement $\lambda : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{C}$ tel que $\lambda(\mathcal{Y}) \subset C_F^1$ (F est G -invariante), alors G agit sur S et S_F est G -stable, ce qui définit un homomorphisme $\beta_F : G \rightarrow \text{Aut } S_F$.

IV.2 Représentation unitaire de G

Sections holomorphes, de carré intégrable, dans le cas kählérien

Soient (X, ω, F) une variété kählérienne, (L, α) un F.L.C. sur X tel que $[(L, \alpha)] \in \mathcal{K}_\omega$ et $|L|$ une S.H. invariante. S_F est l'espace des sections holomorphes de L , on pose

$$S_F^2 = \{s \in S_F ; \|s\|^2 < \infty\}$$

S_F^2 est fermé dans l'espace de Hilbert des sections mesurables de carré sommable de L donc S_F^2 est un espace de Hilbert.

Description des sections de S_F

Soient (X, ω_F) une variété symplectique polarisée (F fortement admissible) (L, α) un F.L.C. sur X tel que $1 = [(L, \alpha)] \in \mathcal{L}_\omega$.

Si $\forall p \in X/D$, D_p est absolument parallèle (relativement à 1), (si F est très fortement admissible, $D_p \simeq \mathbb{R}^k$ est simplement connexe et $\omega|_{D_p} = 0$, donc D_p est absolument parallèle, $\forall 1$) l'espace $(L/D)_p$ des sections autoparallèles au-dessus de D_p est de dimension 1 sur $\mathbb{C}$. Ce qui définit un F.L. L/D sur X/D

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\rho_D^L} & L/D \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma/D \\ X & \xrightarrow{\rho_D} & X/D \end{array} \quad (\rho_D^L \text{ et } \sigma/D \text{ sont les applications canoniques})$$

Remarque : Si $D \neq 0$, il n'existe pas de connexion $\alpha' \in \Omega^1(L/D^*)$ telle que $\rho_D^{L*} \alpha' = \alpha$ (on aurait $\rho_D^* \omega' = \omega$, non dégénéré).

On suppose $1 \in \mathcal{K}_\omega$, soit $|L|$ une S.H. invariante sur L

- L définit une S.H. $|L/D|$ sur L/D
- $\forall r \in X/E$, $\bar{L}_r = L/D|_{(E/D)_r}$ est un F.L. sur lequel il existe une connexion α_r dont la courbure est $\bar{\omega}_r$, la S.H. induite $|L_r|$ est invariante. L'espace $S_{F_r}^2$ est Hilbertien.

Soit $s \in S_F$

- s est autoparallèle au-dessus de D_p , $\forall p \in X/D$; si $\forall p$, D_p est absolument parallèle, s définit une section s/D de L/D
- $\bar{s}_r = s/D|_{(E/D)_r}$ est holomorphe $\forall r \in X/E$.

La représentation (s_{1F}, V_{1F})

On pose :

$$S_F^{2c} = \{s \in S_F; \bar{s}_r \in S_{F_r}^2, \forall r \in X/E; (r \mapsto \|\bar{s}_r\|^2) \text{ est à support compact}\}$$

On suppose X/E orientable, soit $\mu \in \Omega^k(X/E)$ une k -forme réelle qui ne s'annule pas ($2n = \dim X$, $k = \dim D$). On munit $S_F^{2,c}$ du produit scalaire :

$$\{s, t\}_\mu = \int_{X/E} \mu \left(\int_{(F/D)_r} (\overline{s_r} \overline{t_r}) (\overline{\omega_r})^{n-k} \right) = \int_{X/E} \mu \{ \overline{s_r} \overline{t_r} \}_r \quad s, t \in S_F^{2,c}$$

$V_{1F, \mu}$ est le complété de $S_F^{2,c}$ pour la norme $\|s\|_\mu = \{s, s\}_\mu^{1/2}$.

$V_{1F, \mu}$ s'identifie à l'espace des (classes de) sections mesurables s telle que

- s est autoparallèle au-dessus de $D_p \quad \forall p \in X/D$,
- $\bar{s}_r$ est holomorphe et de carré sommable $\forall r \in X/E$,
- $\int_{X/E} \|\bar{s}_r\|_r^2 \mu < \infty$.

Soit G un groupe de Lie connexe, simplement connexe fortement symplectique sur (X, ω) , tel que $\sigma : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{U}$ admette un relèvement $\lambda : \mathcal{G} \rightarrow C$ avec $\lambda(\mathcal{G}) \subset C^{\mathbb{R}} \cap C_F^1$.

- Alors :
- G agit sur L ,
 - G agit sur X/D et sur X/E

et on a :

$$g \cdot S_{F_r}^2 = S_{F_{gr}}^2 \quad \forall g \in G, \quad r \in X/E$$

Définition : Si $g \cdot \mu = f_g \mu \quad \forall g \in G, f_g \in C(X/E)$,

on pose : $(g \cdot \mu = (g^{-1})^* \mu)$, $\beta_{1F, \mu}(g) s = \sqrt{f_g} \circ \sigma_E g \cdot s, s \in V_{1F, \mu}, g \in G$.

$(\beta_{1F, \mu}, V_{1F, \mu})$ est une représentation unitaire de G , indépendante de μ à l'équivalence unitaire près.

Remarque : β_{1F} dépend du relèvement λ choisi (Rem. II.7)

IV.3 Représentation de $C_F^1 \cap C_F^1$ dans $V_{1F\mu}$.

Soit (X, ω_F) une variété symplectique polarisée (F fortement admissible).

Lemme : Soit $f \in C(X)$

- i) $\exists g \in C(X/E), f = g \circ \rho_E \Leftrightarrow \gamma(f) \in U_D^{\mathcal{C}} \Leftrightarrow f \in C_F \cap C_{\bar{F}}$
- ii) $\exists h \in C(X/D), f = h \circ \rho_D \Leftrightarrow \gamma(f) \in U_E^{\mathcal{C}} (\neq f \in C_F + C_{\bar{F}}).$

Lemme : Si $\varphi \in C_F^1 \cap \overline{C_F^1}$

- i) $\exists \varepsilon(\varphi) \in U(X/E)$ tel que $\varepsilon(\varphi) = \rho_{E*} \gamma(\varphi)$
- ii) $\exists \delta(\varphi) \in U(X/D)$ tel que $\delta(\varphi) = \rho_{D*} \gamma(\varphi)$
- iii) ε et δ sont des homomorphismes d'algèbres de Lie.

Remarques : On a $\varepsilon(\varphi) = \rho_{E/D*} \delta(\varphi)$

$$\text{Si } \varphi \in C_F \cap \overline{C_F} \quad \delta(\varphi) = 0 \quad \varepsilon(\varphi) = 0$$

On suppose X/E orientable ($\dim X/E = k$), soit μ une k -forme réelle qui ne s'annule pas sur X/E .

Lemme : i) Il existe une $(2n-k)$ -forme, unique, unique, $\bar{\mu} \in \Omega^{2n-k}(X/D)$, ne s'annulant pas (donc X/D est orientable) telle que $\forall f \in C(X/D)$

$$\int_{X/D} f \bar{\mu} = \int_{r \in X/E} \mu \left(\int_{(E/D)_r} f(\bar{\omega}_r)^{n-k} \right)$$

ii) $\forall \varphi \in C_F^1 \cap \overline{C_F^1}$, on a

$$\text{div}_{\bar{\mu}}(\delta(\varphi)) = \text{div}_{\mu}(\varepsilon(\varphi)) \circ \rho_{E/D}$$

où $\text{div}_{\mu}(\varepsilon(\varphi)) \in C(X/E)$ est défini par :

$$\theta(\varepsilon(\varphi))_{\mu} = \text{div}_{\mu}(\varepsilon(\varphi)) \cdot \mu$$

(et de même pour $\text{div}_{\mu}^{-}(\delta(\varphi))$).

Soit (L, α) un F.L.C. sur X tel que $1 = [(\mathbb{I}, \alpha)] \in \mathcal{L}_{\omega}$.

Définition : On définit $v_{\mu} : C_F^1 \cap \overline{C_F^1} \rightarrow \text{End } S_F$ par

$$v_{\mu}(\varphi) = v(\varphi)^{\wedge} + \frac{1}{2} \text{div}_{\mu}(\varepsilon(\varphi)) \circ \rho_E = v(\varphi) + \frac{1}{2} \text{div}_{\mu}^{-}(\delta(\varphi)) \circ \rho_D$$

$$(\varphi \in C_F^1 \cap \overline{C_F^1}, v(\varphi) = \nabla_{\gamma(\varphi)} + 2i\pi\varphi).$$

Lemme : v_{μ} est un homomorphisme d'algèbre de Lie.

On suppose $1 \in \mathfrak{K}_{\omega}$ et soit $|L|$ une S.H. invariante sur L . On suppose que, $\forall p \in X/D$, D_p est absolument parallèle relativement à 1 .

Soient $S_F^{2,c}$ et $V_{1,F,\mu}$ comme en (IV.2).

Soit $\varphi \in C_F^1 \cap \overline{C_F^1}$, on suppose que $\gamma(\varphi)$ définit un groupe global à un paramètre $G = \{\exp t \gamma(\varphi), t \in \mathbb{R}\}$. Soit $\beta_{1F,\mu}$ la représentation unitaire de G dans $V_{1F,\mu}$ (avec $\lambda(\xi) = \varphi$ si $\sigma(\xi) = \gamma(\varphi)$, $\xi \in \mathcal{G}$).

Proposition : $\forall s \in S_F^{2,c}$ tel que $v_{\mu}(\varphi)s \in S_F^{2,c}$, on a :

$$v_{\mu}(\varphi)s = \left. \frac{d}{dt} (\beta_{1F,\mu}(\exp t \gamma(\varphi))s) \right|_{t=0}$$

Proposition : Soit $\varphi \in C_F^1 \cap C^{\mathbb{R}}$, si E/D est compact, l'opérateur $-iv_{\mu}(\varphi)$, défini sur $S_F^{2,c} \subset V_{1F,\mu}$, est symétrique.

Proposition : Soit $\varphi \in C_F^1 \cap C^{\mathbb{R}}$ telle que $\gamma(\varphi)$ définit un groupe à un paramètre $G = \{\exp t \gamma(\varphi) ; t \in \mathbb{R}\}$; alors l'opérateur $-iv_{\mu}(\varphi)$, défini sur le domaine

$$D(\varphi) = \{s \in S_F^{2,c} ; \gamma(\varphi)s \in S_F^{2,c}\} \subset V_{1F,\mu}$$

est essentiellement auto-adjoint.

V.1 La représentation (β_1, V_1) (voir (II.7)).

La condition d'intégrabilité

Soient G un groupe de Lie connexe, simplement connexe, $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie, $f \in \mathcal{G}^*$, $X = Gf$ et ω la 2-forme canonique sur X .

G_f^0 est la composante connexe du stabilisateur G_f de f
 $\mathcal{G}_f = \{\xi \in \mathcal{G}, \langle f, [\mathcal{G}, \xi] \rangle = 0\}$ est l'algèbre de Lie de G_f^0 .

Notation : Pour $\gamma \in G$, on note Γ_γ (Δ_γ) la translation à gauche (droite) définie par γ

$$\Gamma_\gamma g = \gamma g \quad \Delta_\gamma g = g\gamma \quad \forall g \in G$$

On note $\Gamma : \mathcal{G} \rightarrow U(G)$ ($\Delta : \mathcal{G} \rightarrow U(G)$) les homomorphismes d'algèbres de Lie correspondantes. $\forall \xi \in \mathcal{G}$, $\Gamma(\xi)$ ($\Delta(\xi)$) est un champ invariant à droite (gauche):

$$\begin{aligned} \Gamma(\xi)_\gamma &= -\Delta_{\gamma*} \xi & \gamma \in G & \quad \xi \in \mathcal{G} = \mathcal{G}_e \\ \Delta(\xi)_\gamma &= \Gamma_{\gamma*} \xi & (e \text{ est l'identité de } G) \end{aligned}$$

On a $\Gamma_{\gamma*} \xi = \Delta_{\gamma*}(\text{Ad } \gamma \xi)$

Théorème : L'homomorphisme d'algèbres de Lie $2\pi f : \mathcal{G}_f \rightarrow \mathcal{O}$ se relève en un homomorphisme $l_f : G_f \rightarrow \mathcal{O}^*$ tel que $dl_f = 2\pi f|_{\mathcal{G}_f}$ si et seulement si $[w]$ est entière.

Soit $\mathfrak{M}_f = \{l_f : G_f \rightarrow \mathcal{O}^*, dl_f = 2\pi f|_{\mathcal{G}_f}\}$; si $l_f, l'_f \in \mathfrak{M}_f$ il existe un unique homomorphisme $z_f : G_f \rightarrow \mathcal{O}^*$ tel que $z_f(G_f^0) = \{1\}$, $l'_f = z_f l_f$. z_f définit $z \in \text{Hom}(\pi_1(X), \mathcal{O}^*)$ ($G_f/G_f^0 \simeq \pi_1(X)$).

Théorème : i) Il existe une bijection $(l \rightsquigarrow l_f)$ de $\mathcal{L}_\omega$ sur $\mathcal{M}_f$.

ii) $l_f(G_f) \subset T^1$ si et seulement si $l \in \mathcal{K}_\omega$ ($l_f(G_f^0) \subset T^1$, $\forall l \in \mathcal{L}_\omega$)

iii) $z_f l_f = (zl)_f \quad \forall z \in H^1(X, \mathcal{C}^*)$.

Description explicite de la bijection

1) Soit $l \in \mathcal{L}_\omega$, (L_α) im F. L. C. sur X tel que $[(L_\alpha)] = l$. G agit sur L^* et $G_f = \{g \in G, g(L_f^*) \subset L_f^*\}$. l_f est défini par $l_f(g) = gq$, $g \in G_f, q \in L_f^*$. Si $l \in \mathcal{K}_\omega$, soit $|L|$ une S.H. sur L , on a $|gq| = |q|$, donc $|l_f(g)| = 1 \quad \forall g \in G_f$.

2) Soit $l_f \in \mathcal{M}_f, G_f$ agit à droite sur $G \times \mathcal{C}$ par $(\gamma, z)g = (\gamma g, l_f(g^{-1})z)$, $\gamma \in G, z \in \mathcal{C}, g \in G_f$ et définit une relation d'équivalence sur $G \times \mathcal{C}$. Le quotient $L = G \times \mathcal{C} / G_f$ est un F.L. sur $X = G/G_f$.

On définit $\alpha_o \in \Omega^1(G)$ par $\alpha_o|_\gamma = \Gamma_{\gamma^{-1}}^* f$ ($f \in \mathcal{G}^* = G_e^*, \gamma \in G$), et $\hat{\alpha} \in \Omega^1(G \times \mathcal{C}^*)$ par $\hat{\alpha} = \alpha_o \times \beta$ ($\beta \in \Omega^1(\mathcal{C}^*), \beta_z = \frac{1}{2i\pi} \frac{dz}{z}$).

Si $\tau_f : G \times \mathcal{C}^* \rightarrow L^*$ est la projection canonique, il existe $\alpha \in \Omega^1(L^*)$, unique, telle que $\tau_f^* \alpha = \hat{\alpha}$.

(L_α) est un F.L.C. sur X tel que $[(L_\alpha)] \in \mathcal{L}_\omega$. L'élément de $\mathcal{L}_\omega$ défini par l_f est $l = [(L_\alpha)]$ (et réciproquement l définit l_f). Si $l_f(G_f) \subset T^1$, on définit une S.H. invariante $|L|$ sur L par

$$(\tau_f(\gamma, z), \tau_f(\gamma, z')) = \bar{z}z' \quad \gamma \in G, z, z' \in \mathcal{C},$$

donc $l \in \mathcal{K}_\omega$.

Remarque : $G \times \mathcal{C}^*$ agit à gauche sur L^* :

$$(g, c) \tau_f(\gamma, z) = \tau_f(g\gamma, cz) \quad g, \gamma \in G; c, z \in \mathcal{C}^*$$

Soit $\zeta : \mathcal{G} \times \mathcal{C} \rightarrow U(L^*)$ l'homomorphisme d'algèbres de Lie correspondant,

on a : $\zeta(\xi, c) = \tau_f * \Gamma(\xi, c), \xi \in \mathcal{Y}, c \in \mathcal{C}$, avec

$$\Gamma(\xi, c)_{(\gamma, z)} = (-\Delta_{\gamma} * \xi) \times (-2i\pi c z \frac{\partial}{\partial z}) \quad \gamma \in G, z \in \mathcal{C}^*$$

Alors on a :

$$\langle \alpha, \zeta(\xi, c) \rangle = -(\psi^{\xi} + c) \circ \pi \quad (\xi \in \mathcal{Y}, c \in \mathcal{C})$$

$$(\pi : L^* \rightarrow X, \psi^{\xi}(x) = \langle x, \xi \rangle \quad \forall x \in X \subset \mathcal{Y}^*) .$$

D'autre part, l'action de G sur L^* est un relèvement de l'action de G sur X : $\zeta(\xi, 0) = \eta(\sigma(\xi), \psi^{\xi})$ avec $\sigma : \mathcal{Y} \rightarrow U(X)$.

Représentations induites

Soient $1 \in \mathfrak{L}_{\omega}$ et $1_f \in \mathfrak{M}_f$, $(L\alpha)$ un F.L.C. sur X tel que $[(L\alpha)] = 1$, S l'espace des sections de L . On pose :

$$\hat{S} = \{\hat{s} \in C(G) ; \hat{s}(\gamma g) = 1_f(g^{-1}) \hat{s}(\gamma), \quad \gamma \in G, g \in G_f\} .$$

On définit une bijection $\hat{S} \rightarrow S$, $(\hat{s} \rightsquigarrow s)$ par :

$$s(\rho_f \gamma) = \tau_f(\gamma, \hat{s}(\gamma)) \quad (\gamma \in G, \rho_f : G \rightarrow X, \tau_f : G \times \mathcal{C} \rightarrow L)$$

Lemme : On a : i) $gs = g\hat{s}$, $g \in G, s \in S$, $(g\hat{s})(\gamma) = \hat{s}(g^{-1}\gamma)$

$$\text{ii) } (\gamma(\psi^{\xi})s) = \Gamma(\xi)\hat{s}, \quad \xi \in \mathcal{Y}, s \in S$$

Corollaire : Soit $\underline{s}_0 : G \rightarrow G \times \mathcal{C}^*$ la section $\underline{s}_0(\gamma) = (\gamma, 1)$, $\forall \gamma \in G$ ($\underline{s}_0^* \hat{\alpha} = \alpha_0$), et $\underline{s} = \hat{s} \underline{s}_0$, on a :

$$\forall \gamma \in G, \forall v \in G_{\gamma}, \quad \forall s \in S$$

$$\tau_f(\nabla_v \underline{s}) = \nabla_{\rho_f^* v} s$$

Si $1 \in \mathfrak{K}_{\omega}(1_f(G_f) \subset T^1)$ soit $|L|$ une S.H. invariante sur L (normalisée par $|\tau_f(\gamma, z)| = |z|$, $\gamma \in G, z \in \mathcal{C}$).

$\hat{S}_c = \{\hat{s} \in S ; s \in S_c\}$ est munie du produit scalaire :

$$\{\hat{t}, \hat{s}\} = \int_X \overline{\hat{t}(\gamma)} \hat{s}(\gamma) \omega^n \quad \gamma \in G \quad \hat{t}, \hat{s} \in \hat{S}_c \quad (\dim X = 2n).$$

$(\hat{t}(\gamma) \hat{s}(\gamma) \text{ ne dépend que de } \rho_f(\gamma))$. V_{1_f} est le complété de $\hat{S}_c$.

Alors l'isométrie $s \rightarrow \hat{s}$ définit une équivalence unitaire entre les représentations (β_1, V_1) et $(\text{ind } 1_f, V_{1_f})$, représentation induite par 1_f , de G .

V.2 Polarisations G-invariantes sur (X, ω)

Soit F une polarisation de (X, ω) , et $\sigma_f : \mathcal{Y}_f^\emptyset \rightarrow X_f^\emptyset$ l'application linéaire canonique ($(\sigma_f(\xi))^\eta = \langle f, [\xi, \eta] \rangle$, $\xi, \eta \in \mathcal{Y}_f^\emptyset$). On pose $\mathfrak{h}_f = \sigma_f^{-1} F_f$ ($F_f \subset X_f^\emptyset$).

Proposition : $F \rightsquigarrow \mathfrak{h}_f$ définit une bijection entre l'ensemble $\mathcal{P}_G(X, \omega)$ des polarisations G-invariantes de (X, ω) et l'ensemble $\mathfrak{U}_f$ des sous-algèbres de $\mathcal{Y}_f^\emptyset$ telles que :

- i) $\mathcal{Y}_f^\emptyset \subset \mathfrak{h}_f \subset \mathcal{Y}_f^\emptyset$, $\mathfrak{h}_f$ est $\text{Ad}(G_f)$ stable,
- ii) $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}_f / \mathcal{Y}_f^\emptyset = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Y}_f^\emptyset / \mathfrak{h}_f$,
- iii) $\langle f, [\mathfrak{h}_f, \mathfrak{h}_f] \rangle = 0$.

De plus, $F \in \mathcal{P}_G(X, \omega)$ est admissible si et seulement si l'algèbre $\mathfrak{h}_f \in \mathfrak{U}_f$ correspondante vérifie iv).

- iv) $\mathfrak{h}_f + \mathfrak{h}_f$ est une sous-algèbre de $\mathcal{Y}_f^\emptyset$.

Remarque : Si $x = gf$ $g \in G$, on a :

$$F_x = F_{gf} = \sigma_{gf} (\text{Ad } g \mathfrak{h}_f).$$

Donc, on a

$$F_{\rho_f \gamma} = \rho_f * \hat{F}_\gamma$$

où $\hat{F}$ est la distribution invariante à gauche sur G définie par :

$$\hat{F}_\gamma = \{ \Gamma(\text{Ad } \gamma \xi)_\gamma, \xi \in \mathfrak{h}_f \} = \{ \Delta(\xi)_\gamma, \xi \in \mathfrak{h}_f \}$$

Définitions : Soit $\mathfrak{h}_f \in \mathfrak{U}_f$ (telle que F soit admissible), on pose :

$$\mathfrak{D}_f = \mathfrak{h}_f \cap \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{E}_f = (\mathfrak{h}_f + \bar{\mathfrak{h}}_f) \cap \mathfrak{g}$$

$$D_f^0 = \exp \mathfrak{D}_f, \quad E_f^0 = \exp \mathfrak{E}_f \quad \text{et} \quad D_f = D_f^0 \cdot G_f, \quad E_f = E_f^0 \cdot G_f$$

Lemme : On a

$$D_f f = D_f^0 f = \rho_D^{-1}(\rho_D f) \quad \text{ou} \quad D_f = \{ g \in G ; gf \in \rho_D^{-1}(\rho_D f) \}$$

et de même

$$E_f f = E_f^0 f = \rho_E^{-1}(\rho_E f) \quad \text{ou} \quad E_f = \{ f \in G ; gf \in \rho_E^{-1}(\rho_E f) \}$$

Corollaire : $X/D \simeq G/D_f$, $X/E \simeq G/E_f$ donc si D_f et E_f sont fermés, D et E sont des fibrations et $\rho_{E/D} : X/D \rightarrow X/E$ est un fibré.

Question : Comment s'exprime l'intégrabilité de $\delta_r : (X/E)_r^* \rightarrow U(E_r)$, $r \in X/E$?

Lemme : $\forall \xi \in \mathfrak{D}_f \quad \langle x, \xi \rangle = \langle f, \xi \rangle \quad \forall x \in \rho_D^{-1}(\rho_D f)$.

Soit (L, α) un F.L.C. sur X tel que $[(L, \alpha)] = 1 \in \mathfrak{L}_\omega$. F est une polarisation G invariante fortement admissible, on suppose que $\forall p \in X/D$, D_p est absolument parallèle relativement à 1. L'action de G sur L^* définit une action de G sur L/D^* . On a :

$$D_f = \{ g \in G, \quad g((L/D)_{\rho_D f}^*) \subset (L/D)_{\rho_D f}^* \}$$

ce qui définit

$$\hat{l}_f = D_f \rightarrow \mathcal{C}^*$$

Proposition : On a : i) $d\hat{l}_f = 2i\pi f|_{\mathfrak{D}_f} \quad (\langle f, [\mathfrak{D}_f, \mathfrak{D}_f] \rangle = 0)$

$$\text{ii) } \hat{l}_f|_{G_f} = l_f$$

Remarque : On a donc $\hat{l}_f(D_f) \subset T^1 \Leftrightarrow l_f(G_f) \subset T^1$.

Réciproquement : Si $l_f : G_f \rightarrow \mathcal{C}^*$ est tel qu'il existe $\hat{l}_f : D_f \rightarrow \mathcal{C}^*$, avec $d\hat{l}_f = 2i\pi f|_{\mathfrak{D}_f}$ et $l_f = \hat{l}_f|_{G_f}$, alors D_p est absolument parallèle pour $l \quad (\forall p \in X/D)$.

Corollaire : Si D_p est absolument parallèle pour un $l \in \mathfrak{L}_\omega$, alors D_p est absolument parallèle pour tout $l \in \mathfrak{L}_\omega$ si et seulement si $\text{Hom}(G_f/G_f^0, \mathcal{C}^*) = \text{Hom}(D_f/D_f^0, \mathcal{C}^*)$ (équivalent à $G_f \cap D_f^0/G_f^0 \subset (G_f/G_f^0)'$, ou $(G_f/G_f^0)^{\text{ab}} = (D_f/D_f^0)^{\text{ab}}$ où ' désigne le groupe dérivé et $^{\text{ab}}$ le groupe abélianisé). Si F est très fortement admissible, on a de plus :

$$G_F \cap D_f^0 = G_f^0 \quad \text{soit} \quad D_f/D_f^0 = G_f/G_f^0,$$

(condition non suffisante).

V.3 Quantification

$(L\alpha)$ est un F.L.C. sur X , $l = (L\alpha) \in \mathfrak{L}_\omega$; F est fortement admissible et on suppose D_p absolument parallèle pour l .

Définition : On pose : $\hat{S}_F = \{\hat{s} \in \hat{S}, s \in S_F\}$

Proposition : Soit $\hat{s} \in \hat{S}$, alors $\hat{s} \in \hat{S}_F$ si et seulement si

$$\Delta(\xi)\hat{s} = -2i\pi \langle f, \xi \rangle \hat{s} \quad \forall \xi \in \mathcal{H}_f,$$

Alors on a :

$$\hat{s}(\gamma g) = \hat{l}_f(g^{-1}) \hat{s}(\gamma) \quad \forall g \in D_f \quad \gamma \in G$$

La représentation (β_{1F}, V_{1F})

On suppose $l \in \mathfrak{K}_w$ soient $\mu \in \Omega^k(X/E)$ et $\bar{\mu} \in \Omega^{2n-k}(X/D)$ comme précédemment $V_{1F\mu}$ s'identifie à l'espace $V_{1f, \mathcal{H}_f, \mu}$ des fonctions mesurables $\hat{s} : G \rightarrow \mathbb{C}$ telles que :

$$i) \quad \hat{s}(\gamma g) = \hat{1}_f(g^{-1}) \hat{s}(\gamma) \quad \forall g \in D_f \quad \gamma \in G$$

$$ii) \quad \Delta(\xi)\hat{s} \text{ existe et } \Delta(\xi)\hat{s} = -2i\pi \langle f, \xi \rangle \hat{s} \quad \forall \xi \in \mathcal{H}_f$$

$$iii) \quad \int_{G/D_f} |\hat{s}|^2 \bar{\mu} < \infty$$

G agit sur $V_{1f, \mathcal{H}_f, \mu}$

$$(\beta_{1f, \mathcal{H}_f, \mu}(g) \hat{s})(\gamma) = \sqrt{f_g} \hat{s}(g^{-1}\gamma) \quad \gamma, g \in G \quad \hat{s} \in V_{1f, \mathcal{H}_f, \mu}$$

$$(\text{avec } g\bar{\mu} = f_g \bar{\mu})$$

La représentation $(\beta_{1F, V_{1F}})$ est équivalente à la sous-représentation définie par ii de la représentation $\text{ind } \hat{1}_f$.

I. LA REPRESENTATION DE L'ALGEBRE DE LIE $C_F^1 \cap \overline{C_F^1}$

La représentation v_μ de l'algèbre $C_F^1 \cap \overline{C_F^1}$, définie en annexe (A.IV.3) n'est pas introduite dans le travail de Kostant (du moins dans les notes que nous possédons) ; cette définition n'apporte, en effet, que peu de chose au mathématicien, par contre elle décrit l'opérateur que le physicien doit associer à chaque fonction quantifiable dans une représentation explicitement définie ; elle précise le "principe de correspondance". Nous donnons ici des démonstrations des résultats cités en annexe.

Soit (X, ω_F) une variété symplectique polarisée (F fortement admissible).

Lemme 1 : Soit $f \in C(X)$:

- i) $\exists g \in C(X/E), f = g \circ \rho_E \Leftrightarrow \gamma(f) \in U_D^{\emptyset} \Leftrightarrow f \in C_F \cap \overline{C_F}$
- ii) $\exists h \in C(X/D), f = h \circ \rho_D \Leftrightarrow \gamma(f) \in U_E^{\emptyset}$

Démonstration : $\forall f \in C(X), \forall \xi \in U(X)$, on a :

$$\xi f = df \cdot \xi = i(\gamma(f))\omega \cdot \xi = \omega(\gamma(f), \xi)$$

donc

- i) $f = g \circ \rho_E \Leftrightarrow \xi f = 0, \forall \xi \in U_E \Leftrightarrow \gamma(f) \in U_D^{\emptyset}$
- ii) $f = h \circ \rho_D \Leftrightarrow \xi f = 0, \forall \xi \in U_D \Leftrightarrow \gamma(f) \in U_E^{\emptyset}$

Lemme 2 : Soit $\varphi \in C_F^1 \cap \overline{C_F^1}$, alors

- i) $\exists \varepsilon(\varphi) \in U(X/E)$ tel que $\varepsilon(\varphi)_{\rho_E x} = \rho_E^* \gamma(\varphi)_x \quad \forall x \in X$
- ii) $\exists \delta(\varphi) \in U(X/D)$ tel que $\delta(\varphi)_{\rho_D x} = \rho_D^* \gamma(\varphi)_x \quad \forall x \in X$
- iii) ε et δ sont des homomorphismes d'algèbres de Lie.

Démonstration : i) La polarisation F est admissible, donc la condition (A) (A, III.2) est vraie et C_F est un idéal de C_F^1 donc, pour tout $\varphi \in C_F^1$, $\gamma(\varphi)$ est une dérivation de C_F . Donc (puisque $\overline{C_F^1} = C_{\overline{F}}^1$) pour tout $\varphi \in C_F^1 \cap \overline{C_F^1}$, $\gamma(\varphi)$ est une dérivation de $C_F \cap C_{\overline{F}}$, donc d'après le lemme 1(i) il existe $\varepsilon(\varphi) \in U(X/E)$ tel que

$$\gamma(\varphi)(g \circ \rho_E) = (\varepsilon(\varphi)g) \circ \rho_E \quad \forall g \in C(X/E)$$

donc $\varepsilon(\varphi)_{\rho_E x} = \rho_E * \gamma(\varphi)_x \quad \forall x \in X$ et ε est un homomorphisme puisque γ est un homomorphisme.

ii) D'après le lemme 1(ii) il suffit de montrer que $\gamma(f) \in U_E (f \in C(X))$ entraîne $\gamma([\varphi, f]) \in U_E$ c'est-à-dire $\xi[\varphi, f] = 0, \forall \xi \in U_D$. Comme (A) est vrai, il suffit de montrer localement que pour tout $h \in C(X)$ tel que $\gamma(h) \in U_D$ on a

$$\gamma(h)[\varphi f] = 0 \quad \text{soit} \quad \gamma(h)\gamma(f)\varphi = 0$$

$$\text{or} \quad \gamma(h)\gamma(f)\varphi = \gamma(f)\gamma(h)\varphi + [\gamma(h), \gamma(f)]\varphi \quad \text{et}$$

$$- \gamma(h)\varphi \in C_F \cap \overline{C_F} \text{ d'après i donc } \gamma(f)\gamma(h)\varphi = 0$$

$$- [\gamma(h), \gamma(f)] = \gamma([h, f]), \quad [hf] = \omega(\gamma(f), \gamma(h)) = 0$$

Donc il existe $\delta(\varphi) \in U(X/D)$ tel que

$$\gamma(\varphi)(g \circ \rho_D) = (\delta(\varphi)g) \circ \rho_D \quad \forall g \in C(X/D)$$

donc $\delta(\varphi)_{\rho_D x} = \rho_D * \gamma(\varphi)_x \quad \forall x \in X$ et δ est un homomorphisme.

Remarques : On a $\varepsilon(\varphi)_{\rho_{E/D} p} = \rho_{E/D} * \delta(\varphi)_p \quad \forall p \in X/D$

Si $\varphi \in C_F \cap \overline{C_F}$ on a

$$\delta(\varphi) = 0, \quad \varepsilon(\varphi) = 0$$

On suppose X/E orientable ($\dim X/E = k$), soit $\mu \in \Omega^k(X/E)$ une k -forme réelle qui ne s'annule pas.

Lemme 3 : i) Il existe une $(2n-k)$ -forme, unique, $\bar{\mu} \in \Omega^{2n-k}(X/D)$, réelle, ne s'annulant pas (donc X/D est orientable) telle que $\forall f \in C(X/D)$

$$\int_{X/D} f \bar{\mu} = \int_{r \in X/E} \mu \left(\int_{(E/D)_r} f \bar{\omega}_r^{(n-k)} \right)$$

ii) $\forall \varphi \in C_F^1 \cap \overline{C_F^1}$ on a

$$\text{Div}_{\bar{\mu}}(\delta(\varphi)) = \text{div}_{\mu}(\varepsilon(\varphi)) \circ \rho_{E/D}$$

où $\text{div}_{\mu}(\varepsilon(\varphi)) \in C(X/E)$ est défini par [3] : $\theta(\varepsilon(\varphi))\mu = \text{div}_{\mu}(\varepsilon(\varphi)) \cdot \mu$ (et de même pour $\text{div}_{\bar{\mu}}(\delta(\varphi)) \in C(X/D)$).

Démonstration : i) On pose $\tilde{\mu} = \rho_{E/D}^* \mu \in \Omega^k(X/D)$

Soit $\{\sigma_{\alpha}\}$ un recouvrement ouvert de X/D tel que $\rho_D : \rho_D^{-1}(\sigma_{\alpha}) \rightarrow \sigma_{\alpha}$ soit trivial $\forall \alpha$, et $\sigma_{D\alpha} : \sigma_{\alpha} \rightarrow X$ une famille de sections différentiables, on pose $\tilde{\omega}_{\alpha} = \sigma_{D\alpha}^* \omega \in \Omega^2(\sigma_{\alpha})$ et $\bar{\mu}_{\alpha} = \tilde{\omega}_{\alpha}^{n-k} \wedge \tilde{\mu} \in \Omega^{2n-k}(\sigma_{\alpha})$

1. Dans $\sigma_{\alpha} \cap \sigma_{\beta}$ on a

$$\tilde{\omega}_{\alpha} \Big|_{(E/D)_r} = \tilde{\omega}_{\beta} \Big|_{(E/D)_r} = \bar{\omega}_r \quad \forall r \in \rho_{E/D}(\sigma_{\alpha} \cap \sigma_{\beta})$$

donc $\bar{\mu}_{\alpha} = \bar{\mu}_{\beta}$ et il existe $\bar{\mu} \in \Omega^{2n-k}(X/D)$ telle que $\bar{\mu}_{\alpha} = \bar{\mu} \Big|_{\sigma_{\alpha}}$, $\forall \alpha$.

2. $\bar{\mu}$ ne s'annule pas, en effet, $\forall p \in X/D$, il existe $2n-k$ vecteurs $v_1, \dots, v_{2n-k} \in (X/D)_p$ avec $v_1, \dots, v_{2n-2k} \in (E/D)_p$ linéairement indépendants et $v_{2n-2k+1}, \dots, v_{2n-k}$ tels que $\{\rho_{E/D}^* v_j\}_{2n-2k+1 \leq j \leq 2n-k}$ sont linéairement indépendants, alors :

$$\bar{\mu}_p(v_1, \dots, v_{2n-k}) = (\bar{\omega}_r^{n-k})_p(v_1, \dots, v_{2n-2k}) \mu(\rho_{E/D}^* v_{2n-2k+1}, \dots, \rho_{E/D}^* v_{2n-k}) \neq 0$$

3. Par construction, $\bar{\mu}$ vérifie

$$\int_{X/D} f \bar{\mu} = \int_{r \in X/E} \mu \left(\int_{(E/D)_r} f(\bar{\omega}_r)^{n-k} \right) \quad \forall f \in C(X/D)$$

$$\text{ii) } \forall \varphi \in C_F^1 \cap \overline{C_F^1} \quad \text{on a :}$$

$$\theta(\delta(\varphi)) \bar{\mu}_\alpha = \theta(\delta(\varphi)) \bar{\omega}_\alpha^{n-k} \wedge \bar{\mu} + \bar{\omega}_\alpha^{n-k} \wedge \theta(\delta(\varphi)) \bar{\mu}$$

$$1. \quad \theta(\delta(\varphi)) \bar{\omega}_\alpha = \theta(\delta(\varphi)) \sigma_{D\alpha}^* \omega = d \, i(\delta(\varphi)) \sigma_{D\alpha}^* \omega = d(i(\delta(\varphi)) \sigma_{D\alpha}^* \omega - \sigma_{D\alpha}^* i(\gamma(\varphi)) \omega)$$

puisque $\theta(\gamma(\varphi)) \omega = d \, i(\gamma(\varphi)) \omega = 0$; or $\forall \xi \in U(X/D)$, $\forall p \in X/D$

$$\{i(\delta(\varphi)) \sigma_{D\alpha}^* \omega - \sigma_{D\alpha}^* i(\gamma(\varphi)) \omega\}(\xi)_p = \omega_{\sigma_{D\alpha} p} (\{\sigma_{D\alpha}^* \delta(\varphi) - \gamma(\varphi)\}_{\sigma_{D\alpha} p}, \sigma_{D\alpha}^* \xi_{\sigma_{D\alpha} p})$$

mais $\{\sigma_{D\alpha}^* \delta(\varphi) - \gamma(\varphi)\}_{\sigma_{D\alpha} p} \in D_{\sigma_{D\alpha} p}$ donc

$$\{i(\delta(\varphi)) \sigma_{D\alpha}^* \omega - \sigma_{D\alpha}^* i(\gamma(\varphi)) \omega\}(\xi)_p = 0 \quad \text{si} \quad \xi_p \in (E/D)_p \quad \text{et}$$

$$\theta(\delta(\varphi)) \bar{\omega}_\alpha \big|_{(E/D)_r} = 0, \quad \forall r \in X/E, \quad \text{donc} \quad \theta(\delta(\varphi)) \bar{\omega}_\alpha^{n-k} \wedge \bar{\mu} = 0$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \theta(\delta(\varphi)) \bar{\mu} &= \theta(\delta(\varphi)) \rho_{E/D}^* \mu = d \, i(\delta(\varphi)) \rho_{E/D}^* \mu = \rho_{E/D}^* d \, i(\varepsilon(\varphi)) \mu = \\ &= \rho_{E/D}^* \theta(\varepsilon(\varphi)) \mu = \rho_{E/D}^* \operatorname{div}_\mu(\varepsilon(\varphi)) \cdot \mu = \operatorname{div}_\mu(\varepsilon(\varphi)) \circ \rho_{E/D} \bar{\mu} \end{aligned}$$

Donc au total :

$$\theta(\delta(\varphi)) \bar{\mu}_\alpha = \bar{\omega}_\alpha^{n-k} \wedge \operatorname{div}_\mu(\varepsilon(\varphi)) \circ \rho_{E/D} \bar{\mu} = \operatorname{div}_\mu(\varepsilon(\varphi)) \circ \rho_{E/D} \bar{\mu}_\alpha$$

$$\text{ou} \quad \operatorname{div}_\mu(\delta(\varphi)) = \operatorname{div}_\mu(\varepsilon(\varphi)) \circ \rho_{E/D}$$

Soit (L, α) un fibré linéaire muni d'une connexion sur X tel que
 $1 = [L, \alpha] \in \mathcal{L}_\omega$

Définition : On définit $v_\mu : C_F^1 \cap \overline{C_F^1} \rightarrow \text{End } S_F$ par

$$v_\mu(\varphi)s = v(\varphi)s + \frac{1}{2}\text{div}_\mu(\varepsilon(\varphi))\circ\rho_E \cdot s = v(\varphi)s + \frac{1}{2}\text{div}_\mu(\delta(\varphi))\circ\rho_D s, \quad s \in S_F$$

(on rappelle que $\forall \varphi \in C_F^1, s \in S_F : v(\varphi)s = V_{\gamma(\varphi)}s + 2i\pi \varphi s \in S_F$)

Lemme 4 : v_μ est un homomorphisme d'algèbres de Lie.

Démonstration : Soient $\xi, \eta \in U(X/E)$, on a

$$\theta(\eta)\theta(\xi)\mu = \theta(\eta)\text{div}_\mu(\xi)\mu = (\eta.\text{div}_\mu(\xi))\mu + \text{div}_\mu(\xi)\text{div}_\mu(\eta)\mu$$

donc

$$\begin{aligned} [v_\mu(\varphi), v_\mu(\psi)] &= [v(\varphi), v(\psi)] + \{[V_{\gamma(\varphi)}, \frac{1}{2}\text{div}_\mu(\varepsilon(\psi))\circ\rho_E] - [V_{\gamma(\psi)}, \frac{1}{2}\text{div}_\mu(\varepsilon(\varphi))\circ\rho_E]\} \\ &= v([\varphi, \psi]) + \frac{1}{2}\{\gamma(\varphi)(\text{div}_\mu(\varepsilon(\psi))\circ\rho_E) - \gamma(\psi)(\text{div}_\mu(\varepsilon(\varphi))\circ\rho_E)\} \\ &= v([\varphi, \psi]) + \frac{1}{2}\{\varepsilon(\varphi).\text{div}_\mu(\varepsilon(\psi)) - \varepsilon(\psi)\text{div}_\mu(\varepsilon(\varphi))\}\circ\rho_E \\ &= v([\varphi, \psi]) + \frac{1}{2}\text{div}_\mu([\varepsilon(\varphi), \varepsilon(\psi)])\circ\rho_E = v([\varphi, \psi]) + \frac{1}{2}\text{div}_\mu(\varepsilon([\varphi, \psi]))\circ\rho_E \\ &= v_\mu([\varphi, \psi]) \end{aligned}$$

On suppose $1 \in \mathcal{K}_\omega$ et soit $|L|$ une structure hermitienne invariante sur L . On suppose que, $\forall p \in X/D$, D_p est absolument parallèle relativement à 1 .

Soient $S_F^{2,c}$ et $V_{1,F,\mu}$ définis en (A, IV.2).

Soit $\varphi \in C_F^1 \cap C^{\mathbb{R}} (\subset C_F^1 \cap \overline{C_F^1})$, on suppose que $\gamma(\varphi)$ définit un groupe global à un paramètre $G = \{\exp + \gamma(\varphi) ; t \in \mathbb{R}\}$, soit $\beta_{1,F,\mu}$ la représentation unitaire de G dans $V_{1,F,\mu}$ définie en (A, IV.2) (le relèvement λ étant défini par $\lambda(\xi) = \varphi$ si $\sigma(\xi) = \gamma(\varphi)$, $\xi \in \mathcal{Y}$).

Proposition 1 : Pour tout $s \in S_F^{2,c}$ tel que $v_\mu(\varphi)s \in S_F^{2,c}$, on a

$$v_\mu(\varphi)s = \frac{d}{dt} (\beta_{1,F,\mu}(\exp t \gamma(\varphi))s) \Big|_{t=0}$$

Démonstration : Soit $\xi \in \mathcal{G}$ tel que $\lambda(\xi) = \varphi$, $\forall s \in S_F^{2,c}$ on a :

$$\beta_{1,F,\mu}(\exp t \xi) \cdot s = \sqrt{f_\mu(t)} \circ \rho_E (\exp t \xi) \cdot s$$

où $f_\mu(t) \in C(X/E)$ est définie par

$$(\exp -t \xi)^* \mu = f_\mu(t) \cdot \mu$$

L'action de G sur X/E vérifie $\frac{d}{dt}(\exp t \xi) \Big|_{t=0} = \varepsilon(\varphi)$ donc

$$\operatorname{div}_\mu(\varepsilon(\varphi))\mu = \theta(\varepsilon(\varphi))\mu = \frac{d}{dt}(\exp -t \xi^* \mu) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}f_\mu(t) \Big|_{t=0} \cdot \mu$$

et par suite

$$\frac{d}{dt}(\beta_{1,F,\mu}(\exp t \xi)s) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\sqrt{f_\mu(t)}) \Big|_{t=0} \circ \rho_E \cdot s + \frac{d}{dt}(\exp t \xi \cdot s) \Big|_{t=0} = v_\mu(\varphi) \cdot s$$

puisque

$$\frac{d}{dt}(\exp t \xi \cdot s) \Big|_{t=0} = v(\varphi) \cdot s \quad (\text{A.II.7})$$

Proposition 2 : Soit $\varphi \in C_F^1 \cap C^{\mathbb{R}}$, si E/D est compact, l'opérateur $\operatorname{div}_\mu(\varphi)$ - défini sur $S_F^{2,c}$ - est symétrique.

Démonstration : Soient $s, t \in S_F^{2,c}$; l'invariance de la structure hermitienne $|L|$ entraîne

$$(t, \nabla_{\gamma(\varphi)} s) + (\nabla_{\gamma(\varphi)} t, s) = \gamma(\varphi)(t, s) = \delta(\varphi) (t/D, s/D) \circ \rho_D$$

où $s/D : X/D \rightarrow L/D$, $s \in S_F$ est défini en (A,IV,2) ; $(t/D, s/D)$ est le produit scalaire défini par la structure hermitienne $|L/D|$:

$$(t, s) = (t/D, s/D) \circ \rho_D.$$

Donc

$$\begin{aligned}
& \{t, -iv_{\mu}(\varphi)s\} - \{-iv_{\mu}(\varphi)t, s\} = \\
& = -i \int_{X/D} (\delta(\varphi)(t/D, s/D) \bar{\mu} + (t/D, s/D) \operatorname{div}_{\mu}^{-\delta}(\varphi) \bar{\mu}) \\
& = -i \int_{X/D} \theta(\delta(\varphi)) [(t/D, s/D) \bar{\mu}] = -i \int_{X/D} d[i(\delta(\varphi))(t/D, s/D) \bar{\mu}] = 0
\end{aligned}$$

puisque la forme $(t/D, s/D) \bar{\mu}$ est à support compact.

Si E/D n'est pas compact, $-iv_{\mu}(\varphi)$ peut ne pas être symétrique :

Exemple 1 : Soient $X \subset \mathcal{C}$ un ouvert relativement compact ; $\omega = i \, dz \wedge d\bar{z}$, F est la polarisation kählérienne engendrée par $\partial/\partial\bar{z}$. $L = X \times \mathcal{C}$, et α est l'unique connexion sur L telle que $s_0^* \alpha = \alpha_0 = -i\bar{z} \, dz$ (avec $s_0 : X \rightarrow L^*$; $s_0(x) = (x, 1)$, $\forall x \in X$). La structure hermitienne $|L|$, définie par $((x, c_1), (x, c_2)) = \overline{c_1} c_2$ ($x \in X$, $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$) est invariante, $S_F^{2,c}$ est l'espace des sections $s = f s_0$ où f est une fonction holomorphe sur X , telle que $\int_X |f|^2 \omega < \infty$. Une base de $C_F^1 \cap C^{\mathbb{R}}$ est constituée par les trois fonctions $1, \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$; si φ n'est pas une fonction constante $-iv_{\mu}(\varphi)$ n'est pas symétrique (avec, par exemple, $t = s_0$, $s = z s_0$, on a $\{-iv_{\mu}(\varphi)t, s\} = 0$, $\{t, -iv_{\mu}(\varphi)s\} \neq 0$).

Lemme 5 : Soit $\mathcal{H}$ un espace hilbertien et A un opérateur symétrique défini sur le domaine dense $D(A) \subset \mathcal{H}$. On suppose que A admet une extension auto-adjointe B et que $D(A)$ est stable par e^{itB} , $\forall t \in \mathbb{R}$; alors A est essentiellement auto-adjoint.

Démonstration : $\forall z \in \mathcal{C}$, $\operatorname{Im} z \neq 0$, on pose

$$\mathcal{H}_z = \{\chi \in \mathcal{H} ; (\chi, (A - z)\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in D(A)\}$$

$-\mathcal{H}_z$ est e^{itB} -stable, en effet : $\forall \chi \in \mathcal{H}_z$ on a, $\forall \varphi \in D(A)$

$$\begin{aligned}
(e^{itB} \chi, (A - z)\varphi) &= (\chi, e^{-itB} (B - z)\varphi) = (\chi, (B - z)e^{-itB} \varphi) \\
&= (\chi, (A - z)\varphi') = 0 \quad \text{puisque } \varphi' = e^{-itB} \varphi \in D(A).
\end{aligned}$$

- Soit P_z le projecteur sur $\mathcal{K}_z$, on a $D(B) \cap \mathcal{K}_z = D(B.P_z) \neq \{0\}$ si $\mathcal{K}_z \neq \{0\}$. Soit $0 \neq \chi \in D(B) \cap \mathcal{K}_z$; comme A^* est une extension de B , on a :

$$B\chi = A^*\chi = \bar{z}\chi$$

donc $\chi = 0$, en contradiction avec $\mathcal{K}_z \neq \{0\}$. Donc les espaces de défaut de A sont nuls.

Proposition 3 : Soit $\varphi \in C_F^1 \cap C^{\mathbb{R}}$ telle que $\gamma(\varphi)$ définit un groupe à un paramètre $G = \{\exp t \gamma(\varphi) ; t \in \mathbb{R}\}$; alors l'opérateur $-i\nu_\mu(\varphi)$, défini sur le domaine

$$D(\varphi) = \{s \in S_F^{2,c} ; \nu(\varphi) s \in S_F^{2,c}\} \subset V_{1,F,\mu}$$

est essentiellement auto-adjoint.

Démonstration : La représentation $\beta_{1,F,\mu}$ de G étant fortement continue, on a

$$\beta_{1,F,\mu}(\exp t \gamma(\varphi)) = \exp i t \rho_\mu(\varphi)$$

où $\rho_\mu(\varphi)$ est un opérateur auto-adjoint. D'après la proposition 1, on a :

$$-i\nu_\mu(\varphi) = \rho_\mu(\varphi)|_{D(\varphi)}$$

D'autre part $D(\varphi)$ est stable par G : en effet

$$s \in S_F^{2,c} \Rightarrow \beta_{1,F,\mu}(\exp t \gamma(\varphi))s \in S_F^{2,c}$$

et

$$\begin{aligned} \nu(\varphi)\beta_{1,F,\mu}(\exp t \gamma(\varphi))s &= \nu(\varphi) (\sqrt{f_\mu}(t) \circ \rho_E) \exp t \gamma(\varphi)s = \\ &= (\varepsilon(\varphi)\sqrt{f_\mu}(t) \circ \rho_E) \exp t \gamma(\varphi)s + (\sqrt{f_\mu}(t) \circ \rho_E)\nu(\varphi)\exp t \gamma(\varphi)s \in S_F^{2,c} \end{aligned}$$

si $s \in S_F^{2,c}$ et $v(\varphi)s \in S_F^{2,c}$ puisque

$$v(\varphi) \exp t \gamma(\varphi)s = \exp t \gamma(\varphi)v(\varphi)s \quad \forall s \in S$$

Les exemples suivants montrent que, si $\gamma(\varphi)$ n'est pas intégrable, l'opérateur $-iv_\mu(\varphi)$ (supposé symétrique) peut être ou non essentiellement auto-adjoint et avoir ou non des extensions auto-adjointes.

Exemple 2 : Soient $X = T^*M$ avec $M =]0, +\infty)$, ω est la 2-forme canonique, F la polarisation définie dans l'exemple (A.III.2), $(L_\gamma \alpha)$ un F.L.C. sur X tel que $[L_\gamma \alpha] \in \mathcal{L}_\omega$ et $s_0 : X \rightarrow L^*$ une section telle que $s_0^* \alpha = p \, dq$ ($s_0 \in S_F$) où p et q sont les coordonnées canoniques (A.I,3). Si $s = f s_0$, $f \in C(M)$ et $\varphi = p$, on a (A.IV,1) :

$$v(\varphi)s = - \frac{\partial f}{\partial q} s_0$$

On choisit pour μ la mesure de Lebesgue sur M ($\operatorname{div}_\mu \varepsilon(p) = 0$) donc $-iv_\mu(p)$ s'identifie à l'opérateur

$$i \frac{\partial}{\partial q} : \mathcal{D}(M) \rightarrow L^2(M, \mu)$$

il est connu [9][10] que ses indices de défaut sont $(0,1)$, sa fermeture est symétrique maximale, non auto-adjointe.

Exemple 3 : Dans l'exemple précédent, on remplace $M =]0, \infty)$ par $M =]0, 1[$ - les indices de défaut de $-iv_\mu(p)$ sont ici $(1,1)$ [9][10] ; la fermeture de $-iv_\mu(p)$ n'est pas auto-adjointe, mais possède des extensions auto-adjointes.

Exemple 4 : Soient G un groupe de Lie connexe, simplement connexe, compact $\hat{X} \subset \mathcal{G}^{0,*}$ une orbite telle que $[\hat{\omega}]$ soit entière ($\hat{\omega}$ est la 2-forme canonique) et $\hat{F}$ une polarisation de $(\hat{X}, \hat{\omega})$: $(\hat{X}, \hat{\omega}, \hat{F})$ est une variété kahliérienne. Soit $(\hat{L}_\gamma \alpha)$ un F.L.C. sur $\hat{X}$ tel que $\hat{l} = [(\hat{L}_\gamma \alpha)] \in \hat{\mathcal{L}}_\omega$. On suppose de plus $\dim_{\mathbb{C}} \hat{X} \geq 2$.

Soit $x_0 \in \hat{X}$ et $X = \hat{X} \setminus \{x_0\}$, on pose $\omega = \hat{\omega}|_X$, $F = \hat{F}|_X$, $L = \hat{L}|_X$, $\alpha = \hat{\alpha}|_{L^*}$

Soit $s : X \rightarrow L$ une section, on a $s \in S_F$ si et seulement si il existe une section $\hat{s} : \hat{X} \rightarrow \hat{L}$, $\hat{s} \in S_{\hat{F}}$ telle que

$$s = \hat{s}|_X$$

et si $\varphi \in C(X)$, on a $\varphi \in C_F^1(X)$ si et seulement si il existe $\hat{\varphi} \in C_{\hat{F}}^1(\hat{X})$ telle que $\varphi = \hat{\varphi}|_X$, de plus :

$$v(\varphi)s = v(\hat{\varphi})\hat{s}|_X$$

Donc il existe un isomorphisme $\tau : V_{LF, \mu}(\hat{X}) \rightarrow V_{LF, \mu}(X)$ qui transforme $v_{\mu}(\hat{\varphi}) = v(\hat{\varphi})$ en $v(\varphi)$.

Soit $\xi \in \mathcal{G}$ tel que $\hat{\sigma}_{x_0}(\xi) \neq 0$ ($\hat{\sigma}_{x_0} : \mathcal{G} \rightarrow \hat{X}_{x_0}$)

et soit $\varphi(x) = \langle x, \xi \rangle : -iv(\varphi)$ est essentiellement auto-adjoint ($\dim V_{LF, \mu} < \infty$) alors que $\gamma(\varphi) = \sigma(\xi) \in U(X)$ n'est pas intégrable.

(Cas d'une particule scalaire de masse non nulle.)

Dans ce paragraphe on étudie comparativement les systèmes physiques constitués par une particule scalaire de masse non nulle, soit galiléenne, soit relativiste et l'on compare les "opérateurs de position" que fournit dans chaque cas le procédé standard de quantification décrit au paragraphe I.

II.1 Le cas galiléen

Soit $M = \mathbb{R}^4$ l'espace-temps, soient (t, x) des coordonnées de M ($t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^3$). Le groupe de Galilée $\mathcal{G}$ (dont on note l'élément générique $g = (a, b, v, R)$; $a \in \mathbb{R}^3$, $b \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^3$, $R \in SO(3)$) agit sur M par

$$\begin{aligned} (t', x') &= g(t, x) \quad \text{avec} \\ \left\{ \begin{array}{l} x' &= Rx + vt + a \\ t' &= t + b \end{array} \right. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Soit $\hat{X} = T^*M$ le fibré cotangent à M , on désigne les coordonnées canoniques par $(t, x, -h, p)$. Soient $\hat{\beta}$ et $\hat{\omega}$ respectivement la 1-forme et la 2-forme canoniques :

$$\hat{\beta} = p_i dx^i - h dt \tag{1.2} \quad \hat{\omega} = dp_i \wedge dx^i - dh \wedge dt \tag{1.3}$$

(avec $x = \{x^i\}$, $p = \{p_j\}$, $i, j = 1, 2, 3$; on sous-entend la sommation sur les indices répétés).

On définit une action (symplectique, donc fortement symplectique puisque $\hat{X}$ est simplement connexe), dépendant d'un paramètre réel positif m (la masse) de $\mathcal{G}$ sur $\hat{X}$ par

$$(t', x', h', p') = g(t, x, h, p)$$

$$\begin{cases} x' = Rx + t + a \\ t' = t + b \end{cases} \quad \begin{cases} p' = Rp + mv \\ h' = h + (Rp, v) + \frac{1}{2} m v^2 \end{cases} \quad (1.4)$$

Pour cette action $\hat{X}$ n'est pas un espace homogène de $\mathcal{G}$: $\hat{X}$ est une réunion d'espaces homogènes isomorphes d'équation

$$h - \frac{p^2}{2m} = w \quad (1.5)$$

($w \in \mathbb{R}$ est l'énergie interne [8]). Soit Y l'un de ces espaces homogènes, Y est muni canoniquement d'une 1-forme et d'une 2-forme : $\hat{s}|_Y$ et $\hat{\omega}|_Y$ et l'on a, dans le système de coordonnées (t, x, p) :

$$\hat{\beta}|_Y = p_i dx^i - \left(\frac{p^2}{2m} + w\right) dt \quad (1.6)$$

$$\hat{\omega}|_Y = dp_i \wedge dx^i - \frac{p^i}{m} dp_i \wedge dt = dp_i \wedge d\left(x^i - \frac{p^i}{m} t\right) \quad (1.7)$$

Y est de dimension impaire ($\dim Y = 7$) donc $(Y, \hat{\omega}|_Y)$ n'est pas une variété symplectique, mais une variété de contact [3] ; il existe une distribution réelle de dimension 1 : Δ telle que

$$\forall y \in Y \quad (\omega|_Y)_y(\xi, \eta) = 0, \quad \forall \eta \in Y_y \Leftrightarrow \xi \in \Delta_y,$$

Δ_y est l'espace vectoriel engendré par le vecteur δ_y , avec

$$\delta = p^i \frac{\partial}{\partial x^i} + m \frac{\partial}{\partial t} \quad (1.8)$$

La distribution Δ définit sur Y une relation d'équivalence (notée $y_1 \Delta y_2$; $y_1, y_2 \in Y$) : les classes d'équivalence sont les variétés intégrales maximales de Δ , c'est-à-dire les trajectoires classiques.

$$y_1 \Delta y_2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} n_2 = n_1 + \lambda \frac{p_1}{m} \\ t_2 = t_1 + \lambda \\ p_2 = p_1 \end{cases} \quad (1.9)$$

Soit $X = Y/\Delta$ le quotient de Y par cette relation d'équivalence, X est l'espace des phases du système.

Un système de coordonnées sur X est fourni par (q,p) avec $q^i = x^i - t \frac{p^i}{m}$ (où (x,p,t) sont les coordonnées d'un point de la classe d'équivalence correspondante). Il existe une 2-forme ω sur X telle que $\tau^* \omega = \hat{\omega}|_Y$ (si $\tau: Y \rightarrow X$ est la projection canonique)

$$\omega = dp_i \wedge dq^i. \quad (1.10)$$

$\mathcal{G}$ agit sur X :

$$q' = Rq - b(R \frac{p}{m} + v) + a \quad (1.11)$$

$$p' = Rp + mv$$

(X, ω) est un $\mathcal{G}$ -espace homogène fortement symplectique (l'homomorphisme $\sigma: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{V}$ n'admet pas de relèvement). L'unique polarisation $\mathcal{G}$ -invariante F de (X, ω) est engendrée par les champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial q^i}$.

II.2 Le cas relativiste

On effectue la construction analogue dans le cas relativiste : le groupe de Poincaré $\mathbb{P}$ (élément générique $g = (\underline{a}, \Lambda)$; $\underline{a} \in \mathbb{R}^4$, $\Lambda \in SO(3,1)$.) agit sur l'espace-temps $M = \mathbb{R}^4$ par

$$\underline{x}' = \Lambda \underline{x} + a \quad (2.1) \quad (\underline{x} = \{x^\mu\}, \mu = 0, 1, 2, 3).$$

On désigne par $(\underline{x}, \underline{p})$ les coordonnées canoniques de $\hat{X} = T^*M$, la 1-forme et la 2-forme canoniques ont pour expositions[♦]

$$\hat{\beta} = p_\mu dx^\mu \quad (2.2) \quad \omega = dp_\mu \wedge dx^\mu \quad (2.3).$$

[♦]On a choisi la métrique $g_{ii} = 1, g_{00} = -1$.

$\mathbb{P}$ agit sur $\hat{X}$ par

$$\begin{cases} \underline{x}' &= \Lambda \underline{x} + \underline{a} \\ \underline{p}' &= \Lambda \underline{p} \end{cases} \quad (2.4)$$

Soit Y l'espace homogène défini par

$$-(\underline{p}, \underline{p}) = m^2 > 0, \quad p^0 > 0 \quad . \quad (2.5)$$

On choisit sur Y le système de coordonnées $(\underline{x}, p)$ où $p = \{p_i\}$, $i = 1, 2, 3$, alors

$$\hat{\beta}|_Y = p_i dx^i - \sqrt{p^2 + m^2} dx^0 \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \hat{\omega}|_Y &= dp_i \wedge dx^i - \frac{p^i}{\sqrt{p^2 + m^2}} dp_i \wedge dx^0 \\ &= dp_i \wedge d\left(x^i - \frac{x^0}{\sqrt{p^2 + m^2}} p^i\right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Δ est la distribution engendrée par le champ de vecteurs

$$\delta = p^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sqrt{p^2 + m^2} \frac{\partial}{\partial x^0} \quad . \quad (2.8)$$

Elle définit la relation d'équivalence :

$$y_1, y_2 \in Y; \quad y_1 \Delta y_2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x_2 = x_1 + \lambda p_1 \\ x_2^0 = x_1^0 + \lambda \sqrt{p_1^2 + m^2} \\ p_2 = p_1 \end{cases} \quad (2.9)$$

(q, p) , $q = x - \frac{x^0}{\sqrt{p^2 + m^2}} p$, est un système de coordonnées sur $X = Y/\Delta$.

$\omega = dp_i \wedge dq^i$ est l'unique 2-forme telle que $\tau^* \omega = \hat{\omega}|_Y$, ($\tau: Y \rightarrow X$ est la projection canonique).

(X, ω) est $\mathbb{P}$ -espace homogène fortement symplectique pour l'action.

$$q' = \left\{ 1 + \frac{k \times k}{1 + \sqrt{k^2 + 1}} \right\} Rq - \frac{(k, Rq) + a^0}{\sqrt{k^2 + 1} \sqrt{p^2 + m^2} + (k, Rp)} \left\{ \sqrt{p^2 + m^2} k + \left(1 + \frac{k \times k}{1 + \sqrt{k^2 + 1}} \right) Rp \right\} + a \quad (2.10)$$

$$p' = \sqrt{p^2 + m^2} k + \left\{ 1 + \frac{k \times k}{1 + \sqrt{k^2 + 1}} \right\} Rp ;$$

où l'on a posé $\underline{a} = \{a^0, a\}$ et $\Lambda = [k]R$, $R \in SO(3)$, $[k]$ est la transformation de Lorentz définie par

$$\frac{1}{\sqrt{2(1+k^0)}} \begin{vmatrix} 1 + k^0 + k^3 & k^1 + i k^2 \\ k^1 - i k^2 & 1 + k^0 - k^3 \end{vmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}) \quad (k^0 = \sqrt{1 + \sum (k^i)^2}).$$

L'unique polarisation $\mathbb{P}$ -invariante F de (X, ω) est engendré par les champs de vecteurs $\frac{\partial}{\gamma q^i}$.

II.3 Les opérateurs de position

On a donc obtenu une variété symplectique polarisée (X, ω, F) :

- $X = \mathbb{R}^6$, (coordonnées q^i , p_i);
- $\omega = dp_i \wedge dq^i$;
- F est engendrée par $\frac{\partial}{\partial q^i}$ (F est une polarisation réelle) ;

et on a défini une action fortement symplectique (dépendant d'un paramètre $m > 0$) de $\mathcal{G}(\mathbb{P})$ sur (X, ω) telle que F est invariante.

Les fonctions sur X

- L'interprétation physique des fonctions p_i et q^i (impulsion et position) est identique dans le cas galiléen et dans le cas relativiste.

Dans le cas relativiste, on constate que les trois fonctions q^i sont transformées par le groupe des rotations comme les composantes d'un tri-vecteur mais qu'il n'existe pas de fonction $q^0 \in C(X)$ telle que les quatre fonctions q^0, q^i soient les composantes d'un quadri-vecteur pour le groupe de Lorentz ; le fait qu'on ne puisse pas construire un opérateur de position "covariant" n'est donc pas une conséquence de la quantification, un fait analogue existe en mécanique classique (relativiste) : il n'existe pas quatre fonctions sur l'espace des phases du système qui se transforment comme les quatre composantes d'un quadrivecteur.

Quantification

L'algèbre $C_F^1(X)$ est l'algèbre des fonctions linéaires en q^i

$$\varphi \in C(X) \quad , \quad \varphi \in C_F^1 \Leftrightarrow \exists \hat{\varphi}_i \quad , \quad \hat{\varphi} \in C(X/E) : \varphi(q, p) = \hat{\varphi}_i(p) q^i + \hat{\varphi}(p) \quad (3.1)$$

X étant simplement connexe, $\mathcal{L}_\omega$ contient un seul élément. On le réalise avec $L = X \times \mathcal{C}$, $\alpha = -q^i dp_i \times \frac{1}{2i\pi} \frac{dz}{z}$. La section $s_0 : X \rightarrow L$, $s_0(x) = (x, 1)$ appartient à $\mathcal{S}_F(\nabla_{\frac{\partial}{\partial q^i}} s_0 = \langle s_0^* \alpha , \frac{\partial}{\partial q^i} \rangle = -\langle q^j dp_j , \frac{\partial}{\partial q^i} \rangle = 0)$.

Soit $s = f s_0$ ($f \in C(X)$) , $s \in S_F$ si et seulement si il existe $\hat{f} \in C(X/E)$, $f(q, p) = \hat{f}(p)$. $S_F^{2,c}(X)$ s'identifie donc à l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact $\mathcal{D}(X/E)$

$$S_F^{2,c}(X) \ni s \mapsto \hat{f} \in \mathcal{D}(X/E) \quad \text{si} \quad s = \hat{f} s_0 \quad . \quad (3.2)$$

Pour $\varphi \in C_F^1$ l'opérateur $v(\varphi) : \mathcal{D}(X/E) \rightarrow \mathcal{D}(X/E)$ s'écrit, si φ est donné par (3.1) :

$$(v(\varphi)\hat{f})(p) = \hat{\varphi}_j(p) \frac{\partial \hat{f}}{\partial p_j}(p) + 2i\pi \hat{\varphi}(p) \hat{f}(p) \quad (3.3)$$

en particulier

$$v(q^j)\hat{f} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial p_j} \quad . \quad (3.4)$$

Pour achever la quantification il faut choisir une mesure $\mu \in \Omega^3(X/E)$.

- La mesure de Lebesgue μ_0 est invariante par $\mathcal{G}$ (pour tout choix de m) et l'on a $\text{div}_{\mu_0}(\varepsilon(q^j)) = 0$ et l'on obtient bien l'opérateur de position habituel dans le cas non relativiste.

$$-i v_{\mu_0}(q^j) = -i v(q^j) = -i \frac{\partial}{\partial p_j} \quad (3.5)$$

(on a d'autre part $-i v_{\mu_0}(p_j) = -i v(p_j) = 2\pi p_j$).

- Dans le cas relativiste, μ_0 n'est pas invariante par $\mathbb{P}$ et l'on préfère utiliser la mesure invariante

$$\mu_1 = \frac{\mu_0}{\sqrt{p^2 + m^2}}. \quad (3.6)$$

Mais alors on a

$$\text{div}_{\mu_1}(\varepsilon(q^j)) = \sqrt{p^2 + m^2} \frac{\partial}{\partial p_j} \left(\frac{1}{\sqrt{p^2 + m^2}} \right) = \frac{-p^j}{p^2 + m^2}, \quad (3.7)$$

donc

$$-i v_{\mu_1}(q^j) = -i \frac{\partial}{\partial p_j} + \frac{i}{2} \frac{p^j}{p^2 + m^2} \quad (3.8)$$

$-i v_{\mu_1}(q^i)$ est donc l'opérateur de Newton-Wigner ;

(on a encore $-i v_{\mu_1}(p_j) = 2\pi p_j$).

Le choix de μ_1 plutôt que de μ_0 est évidemment arbitraire et la représentation v_{μ_1} de C_F^1 est équivalente à la représentation de v_{μ_0} , cette dernière ayant le mérite d'être la représentation standard des relations de commutations canoniques $[q^i, p_j] = \delta_j^i$, mais le désavantage de fournir une représentation de $\mathbb{P}$ plus compliquée que v_{μ_1} : dans le cas non relativiste on peut obtenir simultanément sous forme standard une représentation des relations de commutations canoniques et une repré-

sentation (projective^{*}) du groupe cinématique ($\mathcal{G}$), dans le cas relativiste, ce n'est plus possible.

^{*} $\sigma : \tilde{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{M}(X)$ n'admet pas de relèvement, on ne peut donc obtenir qu'une représentation (vraie) de $\tilde{\mathcal{G}}_E$ (A.I.6), ($\tilde{\mathcal{G}}$ est le recouvrement universel de $\mathcal{G}$), c'est-à-dire une représentation projective de $\mathcal{G}$.

III. QUANTIFICATIONS NON STANDARD

Soit (X, ω) une variété symplectique telle que $[\omega]$ soit entière. Si X n'est pas simplement connexe, $\mathcal{H}_\omega$ contient plusieurs éléments et par conséquent pour une polarisation fortement admissible donnée F on a plusieurs façons différentes d'effectuer la quantification. Par contre, le "principe de correspondance" ne donne qu'une façon de quantifier un système physique ayant un analogue classique.

En fait, soit (X, ω) l'espace des phases d'un système classique ($X = T^*M$ où M est l'espace de configuration [3], ω est la 2-forme canonique), on a $[\omega] = 0$ donc le fibré trivial $L = X \times \mathbb{C}$ peut être muni d'une connexion α de telle sorte que $[(L, \alpha)] \in \mathcal{H}_\omega$. De plus un choix possible de connexion est

$$\alpha = p_i dq^i \times \frac{1}{2i\pi} \frac{dz}{z} \quad (\text{coordonnées canoniques})$$

dans ce cas il est clair que la section globale

$$s_0 : X \rightarrow L \quad s_0(p, q) = (p, q, 1)$$

vérifie $\diamond s_0^* \alpha = p_i dq^i = \beta$ (1-forme canonique).

Donc la quantification associée à la polarisation canonique F engendrée par les champs $\frac{\partial}{\partial p_i}$ conduit (A, IV, 1) à la construction usuelle donnée par le "principe $\frac{\partial}{\partial p_i}$ de correspondance" : les opérateurs $v(\varphi)$, $\varphi \in C_F^1$ ont l'expression usuelle et agissent dans un espace de fonction sur X .

$\diamond$ Ce F.L.C. (L, α) est le seul (à l'équivalence près) qui possède la propriété : "Il existe une section globale $s : X \rightarrow L$, telle que $s^* \alpha = \beta$ ".

Si X n'est pas simplement connexe, il existe d'autres possibilités pour (L, α) telles qu'il n'existe pas de section globale $s : X \rightarrow L$ telle que $s^* \alpha = \beta$: dans ce cas on peut donner aux opérateurs $v(\varphi)$ la même expression formelle que dans le cas usuel, mais alors il n'agissent pas dans un espace de fonctions sur X (si $[L] = 0$ on peut encore les faire agir dans un espace de fonctions en modifiant convenablement leur expression).

On va montrer sur des exemples que le contenu physique de la construction dépend du choix de (L, α) : on verra en particulier que dans le cas d'un solide classique on peut obtenir soit des "spins" entiers, soit des "spins" demi-entiers. L'affirmation habituelle qu'un système de spin demi-entier n'a pas d'analogue classique prête donc quelque peu à confusion, à côté de systèmes classiques pour lesquels une quantification différente du "principe de correspondance" produit des spins demi-entiers on étudiera au chapitre IV des systèmes sans analogue classique dont l'espace des phases n'est pas un fibré cotangent (et où la polarisation n'est pas réelle).

III.1 Mouvement d'un solide classique autour de son centre de gravité

Le système que l'on considère est un solide dont le centre de gravité est fixé ; le groupe cinématique est donc le groupe des rotations : $G = SO(3)$. L'espace de configuration du système est $M = \underline{SO(3)}$: l'espace homogène principal de $SO(3)$, l'espace des phases en variables de moment est donc $X = T^*M = T^* \underline{SO(3)}$ et par conséquent $\pi_1(X) \simeq \mathbb{Z}_2$ donc

$$H^1(X, \mathbb{C}) = 0 \quad H^1(X, \mathbb{C}^*) \simeq H^1(X, T^1) \simeq \mathbb{Z}_2$$

et $\mathcal{H}_\omega = \mathcal{L}_\omega$ contient deux éléments correspondant à des fibrés L_i non isomorphes, chacun d'eux pouvant être muni d'une connexion α_i unique à l'équivalence près.

Realisation explicite de (L_i, α_i) , $i = 1, 2$

On pose $\hat{M} = \underline{SU(2)}$, $\hat{X} = T^* \hat{M}$, $\hat{L} = \hat{X} \times \emptyset$; on désigne par $\hat{\beta}$ et $\hat{\omega}$ respectivement la 1-forme et la 2-forme canonique sur $\hat{X}$, on définit la connexion $\hat{\alpha}$ sur $\hat{L}$ par

$$\hat{\alpha} = \hat{\beta} \times \frac{1}{2i\pi} \frac{dz}{z}$$

On désigne par ε l'élément du centre de $\bar{G} = SU(2)$ différent de l'identité. $SU(2)$ agit naturellement sur $\hat{X}$ et l'on définit sur $\hat{X}$ la relation d'équivalence $\approx$ par

$$\hat{x}_1 \approx \hat{x}_2 \Leftrightarrow \hat{x}_1 = \varepsilon \hat{x}_2 \quad \hat{x}_1, \hat{x}_2 \in \hat{X}$$

on a $X = \hat{X}/\approx$.

On définit sur $\hat{L}$ les deux relations d'équivalence :

$$(\hat{x}_1, c_1) \approx_1 (\hat{x}_2, c_2) \Leftrightarrow \hat{x}_1 \approx \hat{x}_2, c_1 = c_2 \quad \hat{x}_i \in \hat{X}, c_i \in \emptyset$$

$$(\hat{x}_1, c_1) \approx_2 (\hat{x}_2, c_2) \Leftrightarrow \hat{x}_1 \approx \hat{x}_2, c_1 = -c_2$$

et l'on pose

$$L_i = \hat{L}/\approx_i \quad (i = 1, 2)$$

L_i est un fibré linéaire sur X et l'on a $[L_1] = 0$; $[L_2] \neq 0$.

Lemme 1 : Soit $\tau_i : \hat{L}^* \rightarrow L_i^*$ la projection canonique, il existe une 1-forme unique (car τ_i est surjectif) $\alpha \in \Omega^1(L_i^*)$ telle que $\tau_i^* \alpha = \hat{\alpha}$.

Démonstration : Le groupe $(\bar{G} \times \emptyset)$ agit sur $\hat{L}$ (A.II.7) et l'on a :

$$(\hat{x}_1, c_1) \approx_1 (\hat{x}_2, c_2) \Leftrightarrow (\hat{x}_1, c_1) = (\varepsilon, 1)(\hat{x}_2, c_2)$$

$$(\hat{x}_1, c_1) \approx_2 (\hat{x}_2, c_2) \Leftrightarrow (\hat{x}_1, c_1) = (\varepsilon, -1)(\hat{x}_2, c_2)$$

avec $(\hat{x}_1, c_1), (\hat{x}_2, c_2) \in \hat{L}, \quad (\varepsilon, 1), (\varepsilon, -1) \in \bar{G} \times \mathcal{C}$

donc si $v_1 \in \hat{L}_{(\hat{x}_1, c_1)} \quad v_2 \in \hat{L}_{(\hat{x}_2, c_2)}$, on a :

$$\tau_1 * v_1 = \tau_1 * v_2 \Leftrightarrow v_1 = (\varepsilon, 1) * v_2 \quad (\text{où } v_1 = v_2)$$

et $\tau_2 * v_1 = \tau_2 * v_2 \Leftrightarrow v_2 = (\varepsilon, -1) * v_2 \quad (\text{où } v_1 = v_2)$

Donc, comme $\hat{\alpha}$ est $\bar{G} \times \mathcal{C}$ invariante, on a

$$\langle \hat{\alpha}_{(\hat{x}_1, c_1)}, v_1 \rangle = \langle \hat{\alpha}_{(\hat{x}_2, c_2)}, v_2 \rangle$$

Il est clair que (L_i, α_i) est un F.L.C. sur X.

Lemme 2 : Pour $i = 1, 2$ on a $[(L_i, \alpha_i)] \in \mathcal{L}_\omega$.

Démonstration : Soient $\hat{\pi} : \hat{L}^* \rightarrow X$, $\pi_i : L_i^* \rightarrow X$, $\tau_i : \hat{L}^* \rightarrow L_i^*$, $\rho : \hat{X} \rightarrow X$ les projections canoniques : on a :

$$\pi_i \circ \tau_i = \rho \circ \hat{\pi}$$

Soit $\omega_i^!$ la courbure de (L_i, α_i) on a :

$$\tau_i^* \pi_i^* \omega_i^! = \tau_i^* d\alpha = d\hat{\alpha}$$

or $\tau_i^* \pi_i^* \omega = \pi_i^* \rho^* \omega = \pi_i^* \hat{\omega} = d\hat{\alpha}$

donc $\tau_i^* \pi_i^* \omega = \tau_i^* \pi_i^* \omega_i^! \quad \text{donc} \quad \omega = \omega_i^!$

puisque $\pi_i \circ \tau_i$ est surjectif.

Réalisation de l'espace S_i des sections de L_i

Soit $\hat{s}_0 : \hat{X} \rightarrow \hat{L}$ la section $\hat{s}_0(\hat{x}) = (\hat{x}, 1) \quad \forall \hat{x} \in \hat{X}$, l'application $s_i \rightsquigarrow \tilde{s}_i$ ($s_i \in S_i$, $\tilde{s}_i \in C(\hat{X})$) définie par $\tau_i \tilde{s}_i(\hat{x}) \hat{s}_0(\hat{x}) = s_i(\rho\hat{x})$ (avec $\tau_i : L \rightarrow L_i$, $\rho : \hat{X} \rightarrow X$) définit une bijection entre S_i et $\tilde{S}_i \subset C(\hat{X})$

$$\tilde{S}_1 = \{ \varphi \in C(\hat{X}) ; \quad \varphi(\varepsilon\hat{x}) = \varphi(\hat{x}) \quad \forall \hat{x} \in \hat{X} \}$$

$$\tilde{S}_2 = \{ \varphi \in C(\hat{X}) ; \quad \varphi(\varepsilon\hat{x}) = -\varphi(\hat{x}) \quad \forall \hat{x} \in \hat{X} \}$$

Lemme 3 : Soit $s_i \in S_i$ et $\hat{s}_i = \tilde{s}_i \hat{s}_0$

$$\text{On a : } \tau_i \nabla_v \hat{s}_i = \nabla_{\rho*v} s_i \quad \forall v \in \hat{X}^\wedge, \quad \forall \hat{x} \in \hat{X} \quad (\text{A.II.2})$$

Démonstration : On a, par construction, $\tau_i \circ \hat{s}_i = s_i \circ \rho : \hat{X} \rightarrow L_i$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \nabla_{\rho*v} s_i &= 2i\pi \langle s_i^* \alpha|_{\rho\hat{x}}, \rho*v \rangle s_i(\rho\hat{x}) \\ &= 2i\pi \langle \rho^* s_i^* \alpha|_{\hat{x}}, v \rangle s_i \circ \rho(\hat{x}) \\ &= 2i\pi \langle \hat{s}_i^* \tau_i^* \alpha|_{\hat{x}}, v \rangle \tau_i \circ \hat{s}_i(\hat{x}) \\ &= \tau_i (2i\pi \langle \hat{s}_i^* \alpha|_{\hat{x}}, v \rangle \hat{s}_i(\hat{x})) = \tau_i \nabla_v \hat{s}_i \end{aligned}$$

Polarisation

$F(\hat{F})$ est la polarisation canonique (A.III.2) de (X, ω)
 $((\hat{X}, \hat{\omega})) - F(\hat{F})$ est $G(\bar{G})$ - invariante et on a

$$\rho * \hat{F}_X^\wedge = F_{\rho X}^\wedge, \quad \forall \hat{x} \in \hat{X}$$

donc, d'après le lemme 3 $s_i \in S_{iF} \Leftrightarrow \hat{s}_i \in \hat{S}_F^\wedge$ ($\hat{S}_F^\wedge$ est l'espace des sections de $\hat{L}$ constantes le long de $\hat{F}$).

Comme d'autre part : $\hat{s}_0 \in \hat{S}_F^\wedge$, l'application $s_i \rightsquigarrow \tilde{s}_i$ définit une bijection linéaire :

$$S_{iF} \rightarrow \tilde{S}_{iF} = \tilde{S}_i \cap C_F^\wedge(\hat{X})$$

On a donc identifié l'espace S_{iF} à l'espace des fonctions différentiables sur $\hat{M} = \underline{SU(2)}$ symétriques ($i = 1$) ou antisymétriques ($i = 2$) pour la translation ε .

Représentation de $SU(2)$

L'action de $\bar{G}$ sur $\hat{L}$, $\hat{X}$, L_i , X commute aux applications canoniques

$$\begin{array}{ccc} \hat{L} & \xrightarrow{\tau_i} & L_i \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi_i \\ \hat{X} & \xrightarrow{\rho} & X \end{array}$$

Donc :

$$\widehat{g s_i} = g \hat{s_i} \quad \forall g \in \bar{G}, \quad s_i \in S_{iF}$$

Comme d'autre part : $g \hat{s}_0 = \hat{s}_0$, on a :

$$\widetilde{g s_i} = g \widetilde{s_i} \quad (g \widetilde{s_i}(\hat{x}) = \widetilde{s_i}(g^{-1} \hat{x}))$$

Donc les représentations $\beta_{1,F}$ de $\bar{G}$ (A,IV,2) sont équivalentes aux sous-représentations de la représentation régulière de $\bar{G}$ agissant dans les espaces

$$\mathcal{K}_1 = \{ \varphi \in L^2(\hat{M}) ; \varphi(\varepsilon \hat{m}) = \varphi(\hat{m}), \forall \hat{m} \in \hat{M} \} \text{ pour } \beta_{1,F}$$

$$\mathcal{K}_2 = \{ \varphi \in L^2(\hat{M}) ; \varphi(\varepsilon \hat{m}) = -\varphi(\hat{m}), \forall \hat{m} \in \hat{M} \} \text{ pour } \beta_{2,F}$$

soit :

$$\begin{aligned} \beta_{1,F} &\simeq \bigoplus_{S \in \mathbb{N}} D^S \\ \beta_{2,F} &\simeq \bigoplus_{S \in \mathbb{N}} D^{S+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Le moment angulaire du solide peut donc prendre : soit toutes les valeurs

entières dans le cas de la quantification classique, soit toutes les valeurs demi-entières dans le cas de la quantification non standard.

Remarque : On peut développer de façon analogue l'étude du système constitué par un solide libre, le groupe cinématique étant alors le groupe de Galilée $\mathcal{G}$. L'espace des phases est cette fois $X = T^*(\mathbb{R}^2 \times \underline{SO(3)})$ et l'on a encore $\pi_1(X) \simeq \mathbb{Z}_2$, donc deux classes de F.L.C. sur X en analogie avec le cas précédent.

On donne ici, sans démonstration, le résultat :

Soit $[m, 0, w]$ la représentation (projective) de $\mathcal{G}$ associée au système constitué d'un point matériel de masse m (décrite dans [8]), c'est-à-dire la représentation fournie par la méthode de Kostant appliquée au $\mathcal{G}$ -espace homogène décrit au chapitre II (l'énergie interne w dépend du choix du relèvement $\lambda : \mathcal{G}_E \rightarrow C(X)$; les représentations correspondant à des choix différents de w sont équivalentes comme représentations projectives de $\mathcal{G}$, inéquivalentes comme représentations de $\tilde{\mathcal{G}}_E$).

Soit, d'autre part, $U_1 = \bigoplus_{S \in \mathbb{N}} D^S$ et $U_2 = \bigoplus_{S \in \mathbb{N}} D^{S+1/2}$ les représentations de $SU(2)$ (considérée ici comme représentations de $\tilde{\mathcal{G}}$ - le recouvrement universel de $\mathcal{G}$ -) introduites au paragraphe précédent, alors la représentation projective de $\mathcal{G}$ est équivalente à :

$[m, 0, w] \otimes U_1$ dans le cas usuel,

$[m, 0, w] \otimes U_2$ pour la quantification non standard.

Un exemple concret d'un système physique constitué d'une famille de solides est constitué, à une certaine approximation, par une assemblée de molécules asymétriques ; ces dernières peuvent, en effet, avoir un spin entier ou demi-entier (selon qu'elles contiennent un nombre pair ou impair de neutrons). Classiquement, on ne peut rendre compte de l'existence de molécules à spin demi-entier qu'en tenant compte de leur structure interne (ce qui est par ailleurs nécessaire si l'on veut tenir compte des niveaux d'énergie interne des molécules dans les différents états, notamment pour les différentes valeurs possibles du spin). Par contre, à l'approximation où l'on néglige la structure interne

(et l'énergie interne) des molécules, c'est-à-dire à l'approximation où l'on considère chaque molécule comme un solide, il faut recourir à la quantification non standard pour obtenir des spins demi-entiers.

III.2 Point matériel sur un cercle fixe

L'espace des phases est ici $X = T^*M = T^*\underline{T}^1$, ω est la 2-forme canonique, et le groupe cinématique est T^1 .

On a ici $\pi_1(X) = Z$, donc

$$H^1(X, \mathcal{C}) \simeq \mathcal{C} \quad \text{et} \quad H^1(X, \mathcal{C}^*) = e_* \quad H^1(X, \mathcal{C}) \simeq \mathcal{C}^*$$

et de même

$$H^1(X, \mathbf{R}) \simeq \mathbf{R} \quad \text{et} \quad H^1(X, T^1) = e_* \quad H^1(X, \mathbf{R}) \simeq T^1$$

$$(e_* : H^1(X, \mathcal{C}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{C}^*) \quad \text{et} \quad e_* : H^1(X, \mathbf{R}) \rightarrow H^1(X, T^1) \quad \text{sont}$$

les applications canoniques définies par $e : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^*$, $e : \mathbf{R} \rightarrow T^1$;
 $e(z) = e^{2i\pi z}$.

Donc $\mathcal{K}_\omega(\mathcal{L}_\omega)$ est un espace homogène principal de $T^1(\mathcal{C}^*)$; si (L, α) est un F.L.C. sur X tel que $[(L, \alpha)] \in \mathcal{L}_\omega$, on a $[L] = 0$: tous les fibrés sont isomorphes, les connexions sont inéquivalentes.

Realisation explicite

On désigne par φ ($0 \leq \varphi < 1$) l'abscisse sur M et par (φ, p) les coordonnées canonique sur X .

On pose $L = X \times \mathcal{C}$, $\alpha_\theta = (p + \theta)d\varphi \times \frac{1}{2i\pi} \frac{dz}{z}$ ($0 \leq \theta < 1$)

Soit $s_0 : X \rightarrow L$ la section $s_0(x) = (x, 1)$, on a

$$s_0^* \alpha_\theta = (p + \theta)d\varphi$$

donc, d'après la condition d'isomorphisme (A.II.2), on a :

$$[(L, \alpha_\theta)] \neq [(L, \alpha_{\theta'})] \quad \text{si} \quad \theta \neq \theta'$$

(Si $[(L, \alpha_\theta)] = (L, \alpha_{\theta'})$, il existe $\lambda \in C(X)$ telle que

$$\frac{1}{2i\pi} \frac{d\lambda}{\lambda} = (\theta - \theta') d\varphi \quad \text{soit} \quad \lambda(\varphi, p) = C e^{2i\pi(\theta - \theta')\varphi}$$

$\lambda \in C(X)$ impose $\theta - \theta' = 0$).

On désigne par F la polarisation canonique (engendrée par $\frac{\partial}{\partial p}$), S_F s'identifie à l'espace des fonctions sur M .

$$\text{On a} \quad v_\theta(p) = -\frac{\partial}{\partial \varphi} + 2i\pi \theta, \quad v_\theta(\varphi) = \varphi$$

(on a choisi pour μ la mesure de Lebesgue sur M).

Les valeurs propres de l'opérateur d'impulsion $-iv_\theta(p)$ sont donc $2\pi(\theta + n)$, $n \in \mathbb{Z}$:

$$-iv_\theta(p) e^{-2i\pi n \varphi} = 2\pi(\theta + n) e^{-2i\pi n \varphi}$$

Remarque 1

Soient $\hat{X} = T^*\mathbb{R}$, $\hat{L} = \hat{X} \times \mathbb{C}$, $\hat{\alpha} = pdq \times \frac{1}{2i\pi} \frac{dz}{z}$ (p, q sont les coordonnées canoniques de $\hat{X}$), on a :

$$X = \hat{X}/\mathbb{Z} \quad (q, p) \approx (q', p') \Leftrightarrow p = p', \quad q = q' + n; \quad n \in \mathbb{Z}$$

Soit $L'_\theta = \hat{L}/\mathbb{Z}$ $(q, p, z) \approx (q', p', z') \Leftrightarrow p = p', \quad q = q' + n, \quad z = e^{2i\pi \theta n} z';$
 $n \in \mathbb{Z}$.

Si $\tau_\theta : \hat{L} \rightarrow L'_\theta$ est la projection canonique, soit α'_θ la connexion sur L'_θ telle que $\tau_\theta^* \alpha'_\theta \simeq \hat{\alpha}$, alors $[(L, \alpha_\theta)] = [(L'_\theta, \alpha'_\theta)]$.

Remarque 2

Un solide libre dans un espace à deux dimensions conduit à une situation analogue.

IV. GROUPE DES ROTATIONS

La construction de Kostant s'applique sans difficulté à un groupe semi-simple compact connexe, simplement connexe quelconque et donne le résultat suivant :

Soient $f \in \mathfrak{g}^*$ et $X = Gf$, soit $X_f \in \mathfrak{g}$ l'unique vecteur tel que $\beta(X_f, X) = (fX) \forall X \in \mathfrak{g}$ (β est la forme de Killing), soit $\mathfrak{K}$ une algèbre de Cartan contenant X_f : alors la classe $[\omega]$ de la 2-forme canonique ω sur X est entière si et seulement si $2i\pi f$ est un poids de $\mathfrak{K}$, soit un système de racines simples tel que $f = \sum_i f_i \alpha_i$, $f_i \geq 0$ et soit Δ^+ l'ensemble des racines positives correspondantes. Pour toute racine α on désigne par $E_\alpha \in \mathfrak{g}$ un vecteur tel que $\text{ad } K.E_\alpha = \langle \alpha K \rangle E_\alpha$, $\forall K \in \mathfrak{K}$. Une polarisation F de (X, ω) est définie par l'algèbre

$$\mathfrak{h}_f = \mathfrak{K} \oplus \sum_{\langle \alpha X_f \rangle = 0} \{\mathfrak{C} E_\alpha\} \oplus \sum_{\substack{\langle \beta X_f \rangle \neq 0 \\ \beta \in \Delta^+}} \{\mathfrak{C} E_\beta\}$$

La représentation β_{1F} de G correspondante est équivalente à la représentation de plus grand poids f ($1 \in \mathfrak{L}_\omega$ est unique puisque X est simplement connexe [11])

Dans ce chapitre, on construit explicitement les différents objets qui interviennent dans la construction de Kostant dans le cas du groupe $G = \text{SU}(2)$ dans le but d'introduire certaines expressions qui seront utilisées au chapitre suivant dans l'étude des espaces homogènes symplectiques du groupe de Poincaré.

IV.1 Le groupe $G = \text{SU}(2)$ - Notations

$\text{SU}(2)$ est le groupe des matrices $g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$; $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Une base (orthonormée pour la forme de Killing) de son algèbre de Lie est donnée par

$$J_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{vmatrix} \quad J_2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad J_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{vmatrix}$$

avec les crochets $[J_1, J_2] = J_3$ $[J_2, J_3] = J_1$ $[J_3, J_1] = J_2$, on a

$$\exp t J_1 = \begin{vmatrix} \cos \frac{t}{2} & i \sin \frac{t}{2} \\ i \sin \frac{t}{2} & \cos \frac{t}{2} \end{vmatrix} \quad \exp t J_2 = \begin{vmatrix} \cos \frac{t}{2} & -\sin \frac{t}{2} \\ \sin \frac{t}{2} & \cos \frac{t}{2} \end{vmatrix}$$

$$\exp t J_3 = \begin{vmatrix} e^{it/2} & 0 \\ 0 & e^{-it/2} \end{vmatrix}$$

D'autre part :

$$\text{si } \xi = \xi^i J_i \quad \text{on a} \quad \xi = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \xi^3 & \xi^1 + i\xi^2 \\ \xi^1 - i\xi^2 & -\xi^3 \end{vmatrix}$$

De $\rho(g) \, d\rho(\xi) \, \rho(g^{-1}) = d\rho(\text{Ad } g \, \xi) \quad \forall \xi \in \mathcal{G}, g \in G$

où ρ est une représentation de G et $d\rho$ la représentation dérivée (de $\mathcal{G}$) on tire, en posant $\xi' = \text{Ad} \left(\begin{vmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{vmatrix} \right) \xi$

$$\begin{vmatrix} \xi'^3 & \xi'^1 + i\xi'^2 \\ \xi'^1 - i\xi'^2 & -\xi'^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi^3 & \xi^1 + i\xi^2 \\ \xi^1 - i\xi^2 & -\xi^3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{a} & -\bar{b} \\ \bar{b} & a \end{vmatrix}$$

On identifie $\mathcal{G}$ à sa représentation.

$$\text{soit} \quad \text{Ad} \left(\begin{vmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(a^2 + \bar{a}^2 - b^2 - \bar{b}^2) & \frac{i}{2}(a^2 - \bar{a}^2 + b^2 - \bar{b}^2) & -(ab + \bar{a}\bar{b}) \\ -\frac{i}{2}(a^2 - \bar{a}^2 - b^2 + \bar{b}^2) & \frac{1}{2}(a^2 + \bar{a}^2 + b^2 + \bar{b}^2) & i(ab - \bar{a}\bar{b}) \\ a\bar{b} + b\bar{a} & i(\bar{a}b - b\bar{a}) & (a\bar{a} - b\bar{b}) \end{vmatrix} = \text{Ad}^t \left(\begin{vmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{vmatrix}^{-1} \right)$$

respectivement dans la base J_i de $\mathcal{G}$ et dans la base duale P^i de $\mathcal{G}^*$
 $(\langle P^i, J_k \rangle = \delta_k^i)$

IV.2 Orbites dans $\mathcal{G}^*$ - condition d'intégrabilité

$$\text{Si } P = p_i P^i, \text{ on pose } \tilde{P} = \begin{vmatrix} p_3 & p_1 + ip_2 \\ p_1 - ip_2 & -p_3 \end{vmatrix}; \text{ alors}$$

$$\{\text{Ad}^t \left(\begin{vmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{vmatrix}^{-1} \right) P\} \sim \begin{vmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{vmatrix} \tilde{P} \begin{vmatrix} \bar{a} & -b \\ \bar{b} & a \end{vmatrix}$$

donc $P^2 = \det \tilde{P}$ est conservé et les orbites de G dans $\mathcal{G}^*$ sont les sphères centrées à l'origine.

On pose $f = -\lambda P^3$ ($\lambda \geq 0$) et $X = Gf$.

Le stabilisateur G_f de f est le sous-groupe de $SU(2)$ vérifiant $a\bar{a} - b\bar{b} = 1$, ce qui, avec $a\bar{a} + b\bar{b} = 1$ donne $b = 0$, $|a| = 1$

$$\text{donc } G_f = \left\{ \begin{vmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{vmatrix}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \right\}$$

G_f est connexe et son algèbre de Lie est $\mathcal{G}_f = \mathbb{R}J_3$.

Pour que la classe $[\omega]$ de la 2-forme canonique ω sur X soit entière, il faut et il suffit que la représentation de $\mathcal{G}_f$

$$X \rightsquigarrow 2i\pi \langle fX \rangle$$

soit intégrable à G_f , c'est-à-dire que l'application

$$\exp t J_3 \mapsto \exp 2i\pi(f J_3) = e^{-2i\pi\lambda t}$$

soit une représentation 1_f de G_f .

Pour cela il faut et il suffit que $4\pi\lambda \in \mathbb{N}$, donc $f = \frac{-S}{2\pi} P^3$, $2S \in \mathbb{N}$
($2i\pi f$ est un poids pour l'algèbre de Cartan $\mathfrak{g}_f$)

IV.3 Parametrage de l'orbite - structure complexe

$SU(2)$ (comme tout sous-groupe de $SL(2, \mathbb{C})$) agit naturellement sur le plan projectif complexe $P(1, \mathbb{C})$ par

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad ((z_1 z_2) \sim (cz_1, cz_2), \forall c \in \mathbb{C})$$

cette action est transitive et le stabilisateur du point $(0, 1)$ est G_f .

En posant $z = \frac{z_1}{z_2}$ (si $z_2 \neq 0$, $z = \infty$ si $z_2 = 0$) on identifie $P(1, \mathbb{C})$ à la sphère de Riemann.

On obtient une section locale de $G \rightarrow G/G_f$ (au voisinage de l'identité de G) en posant ♦

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = (1 + z\bar{z})^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 & z \\ -\bar{z} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \varphi = \text{Arg } a \\ z = \frac{b}{\bar{a}} \end{cases}$$

avec cette notation $g \cdot \{0\} = \{z\} \quad \{0\}, \{z\} \in P(1, \mathbb{C})$.

On pose $[z] = (1 + z\bar{z})^{1/2} \begin{pmatrix} 1 & z \\ -\bar{z} & 1 \end{pmatrix} \in G$ et l'on désigne par $M(z)$ la matrice représentant $\text{Ad}[z]^{-1} t$ dans la base P^i

$$♦ \text{ si } \bar{a} \neq 0 ; \text{ si } \bar{a} = 0, \text{ on pose } \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\varphi} \\ -e^{i\varphi} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}$$

$$M(z) = (1 + z\bar{z})^{-1} \begin{vmatrix} 1 - \frac{z^2 + \bar{z}^2}{2} & \frac{i}{2}(z^2 - \bar{z}^2) & -(z + \bar{z}) \\ \frac{i}{2}(z^2 - \bar{z}^2) & 1 + \frac{z^2 + \bar{z}^2}{2} & i(z - \bar{z}) \\ (z + \bar{z}) & -i(z - \bar{z}) & 1 - z\bar{z} \end{vmatrix}$$

On obtient une carte locale complexe sur X au voisinage de f :
 $[z]f$ ayant pour coordonnée z . On obtient ainsi

$$\begin{vmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{vmatrix} = -\lambda M(z) \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \equiv p(z),$$

soit

$$p_1 = \lambda \frac{z + \bar{z}}{1 + z\bar{z}}$$

$$p_2 = -i\lambda \frac{z - \bar{z}}{1 + z\bar{z}} \quad z = \frac{p_1 + ip_2}{\lambda - p_3}$$

$$p_3 = -\lambda \frac{1 - z\bar{z}}{1 + z\bar{z}}$$

(le point $-f$ n'est pas dans le domaine de la carte).

IV.4 Les homomorphismes $\phi : \mathcal{Y} \rightarrow C(X)$ et $\sigma : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{U}$

L'homomorphisme ϕ est défini par (A.I.5) $\phi^\xi(x) = \langle x\xi \rangle, x \in X, \xi \in \mathcal{Y}$, donc si $\xi = \xi^i J_i, x = p_i P^i$, on a, dans le système de coordonnées précédent :

$$\phi^\xi(x) = \frac{\lambda}{1 + z\bar{z}} \{ \xi^1(z + \bar{z}) - i\xi^2(z - \bar{z}) - \xi^3(1 - z\bar{z}) \}$$

ou, en posant $\xi = |\xi^1 \ \xi^2 \ \xi^3|$

$$\phi^\xi(z) = -\lambda \left(\xi M(z) \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right)$$

ou encore, si $\phi^{[J]}$ est la matrice $\begin{vmatrix} \phi^{[J_1]} \\ \phi^{[J_2]} \\ \phi^{[J_3]} \end{vmatrix}$:

$$\phi^{[J]} = -\lambda M \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \equiv p$$

D'autre part, on a $(\sigma(\xi)f)(x) = \frac{d}{dt} f(e^{-t\xi}x)|_{t=0}$ $f \in C(X)$, $\xi \in \mathcal{G}$, $x \in X$, donc

$$\sigma(J_1) = -\frac{i}{2} \left\{ (1 - z^2) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - (1 - \bar{z}^2) \frac{\partial}{\partial z} \right\}$$

$$\sigma(J_2) = \frac{1}{2} \left\{ (1 + z^2) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + (1 + \bar{z}^2) \frac{\partial}{\partial z} \right\}$$

$$\sigma(J_3) = -i \left\{ z \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \bar{z} \frac{\partial}{\partial z} \right\}$$

où, en posant $\sigma(J) = \begin{vmatrix} \sigma(J_1) \\ \sigma(J_2) \\ \sigma(J_3) \end{vmatrix}$:

$$\sigma(J) = \frac{i}{2} (1 + z\bar{z})^2 \left\{ \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right\} = \frac{i}{2} (1 + z\bar{z})^2 \left\{ \frac{\partial M}{\partial \bar{z}} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial M}{\partial z} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right\}$$

avec $\omega = 2i\lambda \frac{\frac{\partial z}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial z}}{(1 + z\bar{z})^2}$, on a bien

$$i(\sigma(J))\omega = -\lambda dM \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = d\phi^{[J]}$$

IV.5 La polarisation F des algèbres C_F et C_F^1

$\mathcal{H}_f$ doit être une sous algèbre complexe de $\mathcal{G}^{\mathcal{G}}$ de dimension 2 contenant $\mathcal{G}_f^{\mathcal{G}} = \phi J_3$ (elle sera nécessairement stable par G_f puisque G_f est connexe).

$$\text{Soit } \mathfrak{h}_f = \mathfrak{C} J_3 \oplus \mathfrak{C}(\alpha J_1 + \beta J_2)$$

on doit avoir

$$[J_3, (\alpha J_1 + \beta J_2)] = \alpha J_2 - \beta J_1 \in \mathfrak{h}_f$$

Soit $\alpha = \pm i\beta$ et l'on a donc deux possibilités :

$$\mathfrak{h}_f = \mathfrak{C} J_3 \oplus \mathfrak{C}(J_1 + i J_2)$$

$$\overline{\mathfrak{h}_f} = \mathfrak{C} J_3 \oplus \mathfrak{C}(J_1 - i J_2)$$

La polarisation F correspondant à $\mathfrak{h}_f$ (A.V.2) est de dimension 1 et F_x contient le vecteur $\sigma(\text{Adg}(J_1 + i J_2))|_{\mathfrak{g}_f}$, si $x = \mathfrak{g}_f$.

Soit, au point de coordonnées z , le vecteur :

$$i(1 + z\bar{z}) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad \text{ou encore} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

La polarisation F coïncide donc avec la polarisation définie par la structure complexe déjà introduite sur X et l'on est dans le cas Kählérien pur. C_F est donc l'espace des fonctions holomorphes sur X donc C_F est réduit aux constantes $C_F = \mathfrak{C}$. Il résulte immédiatement de la définition de C_F^1 que $\varphi \in C_F^1$ si et seulement si :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (1 + z\bar{z})^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \varphi = 0$$

$$\text{Soit } \varphi(z) = \frac{\alpha(z)\bar{z} + \beta(z)}{(1 + z\bar{z})} \quad \text{où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont des fonctions holomorphes}$$

dans $X \setminus \{-f\}$ et telles que $\varphi \in C(X)$,

$$\text{donc } \varphi(z) = \frac{\varphi_0 + \varphi_1 z + \varphi_2 \bar{z} + \varphi_3 z\bar{z}}{(1 + z\bar{z})}, \quad \varphi_i \in \mathfrak{C}, \text{ on vérifie que}$$

$$\psi^\xi \in C_F^1 \quad \forall \xi \in \mathcal{G}.$$

Remarque : $C_F^1 = \mathfrak{C} \oplus \phi(\mathcal{G})$ est de dimension 4.

IV.6 Sections holomorphes de $(L\alpha)$

Comme G_f est connexe, $\mathcal{L}_\omega = \mathcal{H}_\omega$ contient un seul élément 1. Soit $(L\alpha)$ un F.L.C. sur C tel que $[(L\alpha)] = 1$. Dans (A.V.2) on a identifié l'espace S des sections de L avec l'espace

$$\hat{S} = \{\hat{s} \in C^\infty(G), \hat{s}(g \exp t J_3) = e^{iSt} \hat{s}(g), \forall g \in G, t \in \mathbb{R}\}$$

(on a posé $f = \frac{-S}{2\pi} P^3$, $2 S \in \mathbb{N}$)

Les fonctions possédant cette propriété sont des combinaisons linéaires des fonctions $D_n^{(j)S}$, $j = S, S+1, S+2, \dots, n = j, j-1, \dots, -j+1, -j$.

D'autre part, la section $s_i X \rightarrow L$ définie par $\hat{s} \in \hat{S}$ appartient à S_F (c'est-à-dire ici est holomorphe) si et seulement si (A.V.3) :

$$\Delta(\xi)\hat{s} = -2i\pi \langle f x \rangle \hat{s} \quad \forall \xi \in \mathfrak{h}_f$$

soit $\Delta(J_1 + i J_2)\hat{s} = 0$, ce qui impose $j = S$. On constate de même que $\Delta(J_1 - i J_2)\hat{s} = 0$ implique $\hat{s} = 0$, donc $S_{\bar{F}} = 0$ ♦♦.

La représentation β_{L_F} canonique (A.IV.2) est donc équivalente à la représentation $D^{(S)}$.

♦ Notation classique des éléments de matrices selon Wigner [6], les indices sont placés de sorte que $\sum_n D_1^{(j)n}(g_1) D_n^{(j)m}(g_2) = D_1^{(j)m}(g_1 g_2)$, $\forall g_1, g_2 \in G$.

♦♦ On échangerait les rôles de $\mathfrak{h}_f$ et $\overline{\mathfrak{h}_f}$ en faisant la construction à partir de $-f$.

V. ESPACES HOMOGÈNES SYMPLECTIQUES DU GROUPE DE POINCARÉ

On étudie dans ce chapitre les orbites correspondant à une masse réelle non nulle du groupe de Poincaré $\mathbb{P}$ dans le dual $\mathfrak{P}^*$ de son algèbre de Lie. Les systèmes physiques correspondants (points matériels relativistes libres) sont sans analogues classiques^{*} : l'"espace des phases" n'est plus un fibré cotangent (si le spin est non nul), les polarisations ne sont plus réelles. On retrouve, par une méthode différente, les opérateurs de position de Chakrabarti [13], [14], [15]. Au paragraphe 7 on montre qu'il n'existe pas d'opérateurs de position pour une particule de masse nulle et d'hélicité non nulle.

V.1 Equation des orbites dans $\mathfrak{P}^*$

On désigne par Ξ_α , $\Lambda_{\alpha\beta} = -\Lambda_{\beta\alpha}$ ($\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$) une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{P}$ de $\mathbb{P}$, vérifiant les relations de commutation

$$[\Lambda_{\alpha\beta}, \Xi_\gamma] = g_{\alpha\gamma} \Xi_\beta - g_{\beta\gamma} \Xi_\alpha,$$

$$[\Lambda_{\alpha\beta}, \Lambda_{\gamma\delta}] = g_{\alpha\gamma} \Lambda_{\beta\delta} - g_{\beta\gamma} \Lambda_{\alpha\delta} + g_{\alpha\delta} \Lambda_{\gamma\beta} - g_{\beta\delta} \Lambda_{\gamma\alpha}.$$

P^α , $M^{\alpha\beta} = -M^{\beta\alpha}$ est la base de $\mathfrak{P}^*$ telle que

$$(P^\alpha, \Xi_\beta) = \delta_\beta^\alpha \quad (M^{\alpha\beta}, \Lambda_{\gamma\delta}) = \delta_\gamma^\alpha \delta_\delta^\beta - \delta_\delta^\alpha \delta_\gamma^\beta,$$

$$(P^\alpha, \Lambda_{\beta\gamma}) = (M^{\alpha\beta}, \Xi_\gamma) = 0,$$

et les coordonnées de $P \in \mathfrak{P}^*$ sont p_α , $m_{\alpha\beta} = -m_{\beta\alpha}$

$$P = p_\alpha P^\alpha + \frac{1}{2} m_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta}.$$

^{*} Indépendamment du fait que la cinématique est relativiste : la situation est analogue dans le cas des espaces homogènes symplectiques du groupe de Galilée.

On définit sur $\mathcal{P}^*$ les polynômes

$$\begin{aligned} p^2 &= p_\alpha p^\alpha & (p^\alpha &= g^{\alpha\beta} p_\beta) \\ w^2 &= w_\alpha w^\alpha & (w^\alpha &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} m_{\beta\gamma} p_\delta) \end{aligned} .$$

La variété X et la surface d'équation

$$-p^2 = m^2 > 0^\diamond, \quad w^2 = \sigma^2 m^2, \quad p^0 > 0 \quad .$$

Soit $f \in X$ le point des coordonnées

$$p^0 = m \quad p^i = 0 \quad m_{12} = -\sigma \quad m_{31} = m_{23} = 0 \quad m_{0i} = 0$$

(on a donc nécessairement $w^2 > 0$).

V.2 La condition d'intégrabilité

Si $\sigma \neq 0$ le stabilisateur $\mathbb{P}_f$ de f dans $\bar{\mathbb{P}}$ (recouvrement universel de $\mathbb{P}$) est le sous-groupe

$$\bar{\mathbb{P}}_f = \left\{ \left(x^0, \begin{vmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{vmatrix} \right); x^0 = \exp x^0 \Xi_0, 0 \leq \varphi < 2\pi \right\} .$$

Son algèbre de Lie $\mathcal{P}_f$ est engendrée par Ξ_0 et Λ_{12} .

La classe $[\omega] \in H^2(X, \mathbb{C})$ de la forme symplectique canonique $\omega \in \Omega^2(X)$ est entière (A.V.1) si et seulement si la représentation de $\mathcal{P}_f$ $X \mapsto 2i\pi \langle fX \rangle$ est intégrable à $\bar{\mathbb{P}}_f$ c'est-à-dire si l'application

$$\left(x^0, \begin{vmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{vmatrix} \right) \rightarrow e^{-2i\pi m x^0} e^{-4i\pi\sigma\varphi}$$

[♦] La métrique est $g_{00} = -1$, $g_{ii} = +1$ ($i = 1, 2, 3$).

est une représentation de $\bar{\mathbb{P}}_f$, pour cela il faut et il suffit que $4\pi\sigma \in \mathbb{N}$ soit $\sigma = \frac{S}{2\pi}$ ($2S \in \mathbb{N}$).

Si $\sigma = 0$, on a $\bar{\mathbb{P}}_f = \{(n^0, R) ; x^0 = \exp n^0 \Xi_0, R \in \text{SU}(2)\}$. $\mathcal{P}_f$ est engendrée par $\Xi_0, \Lambda_{12}, \Lambda_{23}, \Lambda_{31}$; comme $\langle f, \Lambda_{ij} \rangle = 0$, $[\omega]$ est entière (en fait $X \simeq \mathbb{R}^6$ et $[\omega] = 0$).

V.3 Polarisations $\mathbb{P}$ -invariantes de X

Si $\sigma \neq 0$, on vérifie que les seules sous-algèbres de $\mathcal{P}$ qui définissent (A.V.2) une polarisation $\mathbb{P}$ invariante sur X sont $\mathcal{H}_f$ et $\bar{\mathcal{H}}_f$, où $\mathcal{H}_f$ a pour base

$$\{\Xi_\alpha, \Lambda_{12}, \Lambda_{23} + i \Lambda_{31}\}.$$

Les algèbres $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{E}_f$ correspondantes (A.V.2) sont respectivement engendrées par $\{\Xi_\alpha\}$ et $\{\Xi_\alpha, \Lambda_{ij}\}$ et l'on a

$$D_f = \left\{ \left(\underline{x}, \begin{vmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{vmatrix} \right); \underline{x} \in \mathbb{R}^4, 0 \leq \varphi < 2\pi \right\}$$

$$E_f = \{(\underline{x}, R) ; \underline{x} \in \mathbb{R}^4, R \in \text{SU}(2)\}.$$

Les applications (A.III.4)

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \rho_D \downarrow & \searrow \rho_E & \\ X/D & \xrightarrow{\rho_{E/D}} & X/E \end{array}$$

sont des fibrations et

les fibres de $\rho_D : X \rightarrow X/D$ sont de 3-plans ($\mathbb{R}^3$) ,
 les fibres de $\rho_{E/D} : X/D \rightarrow X/E$ sont des sphères (S_2) ,
 (les fibres de $\rho_E : X \rightarrow X/E$ sont isomorphes au produit $\mathbb{R}^3 \times S_2$) ,
 X/E est l'hyperboloïde à une nappe $-p^2 = m^2$, $p^0 > 0$,
 (X est donc homéomorphe à $\mathbb{R}^6 \times S_2$).

Si $\sigma = 0$, l'unique polarisation $\mathbb{P}$ -invariante F est réelle et définie par $\mathcal{H}_f = \mathcal{H}_f$, engendrée par $\{\Xi_\alpha, \Lambda_{ij}\}$; X est un fibré en 3-plans de base d'hyperboloïde $-p^2 = m^2$.

V.4 Paramétrage de X

Tout élément $(\underline{x}, \Lambda) \in \bar{\mathbb{P}}$, tel que $\Lambda \neq -1$ admet une décomposition unique de la forme

$$(\underline{x}, \Lambda) = (q, \mathbf{1}) (0, [k]) (0, [z]) \begin{pmatrix} q^0 & \begin{vmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{vmatrix} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

où l'on a utilisé les décompositions

$$-\mathbf{1} \neq R \in \text{SU}(2) \quad R = [z] \begin{vmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{vmatrix} , \quad z \in \mathcal{C} , \quad (\text{Cf. IV.3})$$

$$\Lambda \in \text{SL}(2, \mathcal{C}) \quad \Lambda = [k] R , \quad R \in \text{SU}(2) , \quad k \in \mathbb{R}^3 ,$$

$$[k] = \frac{1}{\sqrt{2(1+k^0)}} \begin{vmatrix} 1+k^0+k_3 & k_1+ik_2 \\ k_1-ik_2 & 1+k^0-k_3 \end{vmatrix} , \quad \left(k^0 = \sqrt{1+\sum_i k_i^2} \right) .$$

On obtient ainsi une carte locale dans un voisinage de f , le point $(\underline{x}, \Lambda)f$ ayant pour coordonnées $q \in \mathbb{R}^3$, $p = mk \in \mathbb{R}^3$, $z \in \mathcal{C}$ si $\sigma \neq 0$ et q, p si $\sigma = 0$ (si $\sigma = 0$, le paramétrage de X devient d'ailleurs global puisque la décomposition $(\underline{x}, \Lambda) = (q, \mathbf{1}) (0, [k]) (q^0, R)$, $R \in \text{SU}(2)$ existe $\forall (\underline{x}, \Lambda) \in \bar{\mathbb{P}}$).

Les inclusions $\overline{D}_f \subset D_f \subset E_f \subset \overline{P}$ suggèrent plutôt la décomposition $(\underline{x}, \Lambda) = (0, [k]) (0, [z]) (y, \underline{1}) \begin{pmatrix} y^0 & \begin{vmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$ où les produits successifs à partir de la droite appartiennent respectivement à $\overline{P}_f, D_f, E_f, \overline{P}$. On lui préfère la décomposition (4.1) qui conduit à des calculs plus simples et qui introduit des variables dont l'interprétation physique est plus claire : X s'identifie au produit $\mathbb{R}^6 \times S_2$, $\overline{P}$ agit sur $\mathbb{R}^6$ (coordonnées (q, p)) comme en (II.2) et sur S_2 apr la rotation de Wigner.

V.5 La 2-forme canonique sur X

On introduit les notations $J_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \Lambda_{jk}$, $K_i = K_{oi}$ ($i, j, k = 1, 2, 3$).

$$\begin{aligned} \sigma(\underline{H}) &= \begin{vmatrix} \sigma(\underline{H}_1) \\ \sigma(\underline{H}_2) \\ \sigma(\underline{H}_3) \end{vmatrix} & \sigma(J) &= \begin{vmatrix} \sigma(J_1) \\ \sigma(J_2) \\ \sigma(J_3) \end{vmatrix} & \sigma(K) &= \begin{vmatrix} \sigma(K_1) \\ \sigma(K_2) \\ \sigma(K_3) \end{vmatrix} \\ \psi[\underline{H}] &= \begin{vmatrix} \psi[\underline{H}_1] \\ \psi[\underline{H}_2] \\ \psi[\underline{H}_3] \end{vmatrix} & \psi[J] &= \begin{vmatrix} \psi[J_1] \\ \psi[J_2] \\ \psi[J_3] \end{vmatrix} & \psi[K] &= \begin{vmatrix} \psi[K_1] \\ \psi[K_2] \\ \psi[K_3] \end{vmatrix} \end{aligned}$$

où $\sigma = \mathcal{G} \rightarrow U(X)$, et $\psi : \mathcal{G} \rightarrow C(X)$ sont les homomorphismes canoniques. On pose d'autre part

$$\begin{aligned} p &= \begin{vmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{vmatrix} & \hat{p} &= \begin{vmatrix} 0 & p_3 & -p_2 \\ -p_3 & 0 & p_1 \\ p_2 & -p_1 & 0 \end{vmatrix} & \frac{\partial}{\partial p} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial p_1} \\ \frac{\partial}{\partial p_2} \\ \frac{\partial}{\partial p_3} \end{vmatrix} & dp &= \begin{vmatrix} dp_1 \\ dp_2 \\ dp_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

et de même pour $q, \hat{q}, \frac{\partial}{\partial q}, dq$.

Enfin on pose $V(z) = M(z) \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ ($M(z)$ est définie en (IV.3)) et $p^0 = \sqrt{p^2 + m^2}$.

Si $a = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix}$, $b = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix}$ on désigne le produit scalaire par

$$(a, b) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \sigma(\Xi) &= -\frac{\partial}{\partial q} \\ \sigma(\Xi_0) &= \frac{-1}{p^0} \left(p \frac{\partial}{\partial q} \right) \\ \sigma(J) &= \hat{q} \frac{\partial}{\partial q} + \hat{p} \frac{\partial}{\partial p} + (1+z\bar{z})^2 \frac{i}{2} \left\{ \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right\} \\ \sigma(K) &= -p^0 \frac{\partial}{\partial p} + \frac{q}{p^0} \left(p \frac{\partial}{\partial q} \right) + (1+z\bar{z})^2 \frac{\hat{p}}{m+p^0} \frac{i}{2} \left\{ \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right\} \end{aligned} \quad (5.1)$$

(si $\sigma = 0$ des termes en $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ n'apparaissent pas), et

$$\begin{aligned} \psi[\Xi] &= p \\ \psi[\Xi_0] &= p^0 \\ \psi[J] &= \hat{p} q + \sigma \left\{ 1 - \frac{\hat{p}\hat{p}}{m(m+p^0)} \right\} v \\ \psi[K] &= -p^0 q + \sigma \frac{\hat{p}}{m} v. \end{aligned} \quad (5.2)$$

On en déduit la 2-forme canonique*

$$\omega = (dp, dq) - \sigma \left(\frac{dp}{m}, d \left\{ \frac{\hat{p}}{m+p_0} v \right\} \right) - 2 i \sigma \frac{dz d\bar{z}}{(1+z\bar{z})^2} .$$

V.6 Les opérateurs de position

On remarque tout d'abord que les fonctions q_i qui ont avec les variables d'impulsion p_i les relations de commutation canoniques : $[q_i, p^j] = \delta_i^j$, ne commutent pas entre elles et par conséquent, ne peuvent pas être interprétées comme des variables de position.

Par ailleurs, si l'on pose $x = q - \frac{\sigma}{m} \frac{\hat{p}}{m+p_0} v$, on a

$$\omega = (dp \, dx) - 2 i \sigma \frac{dz d\bar{z}}{(1+z\bar{z})^2} ,$$

donc dans la carte (x, p, z) on a

$$\gamma(x) = \frac{\partial}{\partial p}$$

$$\gamma(p) = - \frac{\partial}{\partial x} ,$$

et par conséquent :

$$[x_i, p^j] = \delta_i^j \quad [x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0 ,$$

donc les fonctions x_i peuvent être interprétées comme les variables de

* Pour vérifier les égalités $i(\sigma(J))\omega = d\Psi^{[J]}$ et $i(\sigma(K))\omega = d\Psi^{[K]}$ on utilise les relations

$$(1+z\bar{z})^2 \frac{i}{2} \left\{ \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} x \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial z} x \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} \right\} = \hat{v} ,$$

et $\hat{a} \hat{b} = -(a \, b) + b \, x \, a$; on a posé $b \, x \, a = b(a, \cdot) -$.

position. (Il est clair d'autre part que les fonctions x_i définies dans le domaine de la carte (q, p, z) ont un prolongement unique appartenant à $C(X)$).

Dans la carte (q, p, z) on a

$$\gamma(x) = \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\sigma}{m} \frac{\hat{v}}{m+p^0} \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\sigma}{m} \frac{p}{p^0} \left(v \frac{\hat{p}}{(m+p^0)^2} \frac{\partial}{\partial q} \right) ;$$

donc en utilisant les formules (5.1) :

$$\begin{aligned} \gamma(x) &= \frac{1}{m} \frac{\hat{p}}{m+p^0} \sigma(J) - \frac{1}{mp^0} \left\{ p^0 - \frac{p \times p}{m+p^0} \right\} \sigma(K) \\ &- \frac{1}{mp^0} \left\{ p^0 - \frac{p \times p}{m+p^0} \right\} \left\{ \frac{(pq)}{m+p^0} + \frac{m}{p^0} \frac{q \times p}{m+p^0} \right\} \sigma(\Xi) \\ &- \frac{\sigma}{m} \left\{ \frac{\hat{v}}{m+p^0} + \frac{p \times v}{p^0(m+p^0)} - \frac{\hat{p}}{m+p^0} \right\} \sigma(\Xi) . \end{aligned}$$

Pour calculer $v(x)|_{S_F}$ on utilise la formule

$$\nabla_{\varphi \gamma(\psi)} = \varphi \nabla_{\gamma(\psi)} = \varphi (v(\psi) - 2i\pi \psi) = \varphi v(\psi) - 2i\pi \varphi \psi \quad \forall \varphi, \psi \in C(X) ;$$

en se rappelant d'autre part que $\nabla_{\sigma(\Xi_i)}|_{S_F} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial q^i}}|_{S_F} = 0$,

(la polarisation $\mathbb{P}$ -invariante F est engendrée par les champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial q^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$) et que $\sigma(J_i) = \gamma(\psi^{[J_i]})$, $\sigma(K_i) = \gamma(\psi^{[K_i]})$, il vient

$$\begin{aligned} \nabla_{\gamma(x)}|_{S_F} &= \frac{1}{m} \left\{ \frac{\hat{p}}{m+p^0} v(\psi^{[J]}) - \frac{1}{p^0} \left\{ p^0 - \frac{p \times p}{m+p^0} \right\} v(\psi^{[K]}) \right\} \\ &- 2i\pi \left\{ q - \frac{\sigma}{m} \frac{\hat{p}}{m+p^0} v \right\} . \end{aligned}$$

Or

$$\gamma(x) = \nabla_{\gamma(x)} + 2i\pi x = \nabla_{\gamma(x)} + 2i\pi \left\{ q - \frac{\sigma}{m} \frac{\hat{p}}{m+p^0} v \right\} .$$

Donc

$$v(x)|_{S_F} = \frac{1}{m} \left\{ \frac{\hat{p}}{m+p^0} v(\Psi^{[J]}) - \frac{1}{p^0} \left\{ p^0 - \frac{p \cdot p}{m+p^0} \right\} v(\Psi^{[K]}) \right\}.$$

On désigne par μ la mesure $\mathbb{P}$ -invariante sur l'hyperboloïde X/E ($d\mu = \frac{\pi dp_i}{p^0}$)

on a

$$v_\mu(\Psi^{[J]}) = v(\Psi^{[J]}) \quad v_\mu(\Psi^{[K]}) = v(\Psi^{[K]})$$

(puisque μ est $\mathbb{P}$ -invariante), et d'autre part :

$$\operatorname{div}_\mu \varepsilon(x_i) = \operatorname{div}_\mu \left(\frac{\partial}{\partial p^i} \right) = \frac{-p_i}{(p^0)^2}.$$

Les opérateurs de position sont donc

$$-i v_\mu(x) = \frac{-i}{m} \left\{ \frac{\hat{p}}{m+p^0} v_\mu(\Psi^{[J]}) - \frac{1}{p^0} \left\{ p^0 - \frac{p \cdot p}{m+p^0} \right\} v_\mu(\Psi^{[K]}) \right\} + \frac{i}{2} \frac{p}{(p^0)^2}.$$

Ou encore, puisque $v_\mu(\Psi^{[\xi]}) = d\beta_{L_F, \mu}(\xi)^* \quad \forall \xi \in \mathcal{P}$

$$\boxed{-i v_\mu(x) = \frac{-i}{m} \left\{ \frac{\hat{p}}{m+p^0} d\beta_{L_F, \mu}(J) - \left\{ p^0 - \frac{p \cdot p}{m+p^0} \right\} d\beta_{L_F, \mu}(K) \right\} + \frac{i}{m} \frac{p}{(p^0)^2}} \quad (6.1)$$

Cette dernière expression garde un sens dans la réalisation plus usuelle ("à la Wigner") de la représentation $[m, s]$ du groupe de Poincaré :

soit (L, α) un F.L.C. sur X tel que $[(L, \alpha)] = 1 \in \mathcal{K}_\omega$, on a vu (A.IV.2)

qu'une section $s \in S_F^{2c}$ s'identifie à une application $s : X/E \rightarrow \bigcup_{r \in X/E} S_{F_r}^2$

telle que $s(r) \in S_{F_r}^2$ ($\forall r \in X/E$); ici $(E/D)_r$ ($r \in X/E$) est la sphère S_2

et l'espace $S_{F_r}^2$ est un espace hilbertien V de dimension $2S+1$ (si $\sigma = \frac{S}{2\pi}$)

où agit la représentation $D^{(S)}$ du groupe des rotations (voir chapitre IV).

* 1 est l'unique élément de $\mathcal{K}_\omega = \mathcal{L}^\omega$ (X est simplement connexe) F est la polarisation $\mathbb{P}$ invariante déjà introduite (F et $\bar{F}$ sont les seules polarisations $\mathbb{P}$ invariantes et l'on a $S_{\bar{F}}^{2c} = \{0\}$ comme au chapitre IV).

Donc l'espace S_F^{2c} et par conséquent son complété $V_{L_F/\mu}$ s'identifie à un espace de fonctions définies sur l'hyperboloïde X/E à valeur dans un espace hilbertien V où agit une représentation du groupe des rotations : on retrouve la construction usuelle de Wigner. Dans cette réalisation les opérateurs de position $-i \rho_\mu(x_i)$ sont donnés par l'expression (6.1) où $d\beta_{L_F/\mu}(\xi)$ ($\xi \in \mathcal{P}$) est la représentation correspondante de l'algèbre de Lie $\mathcal{P}$ et où p_i est l'opérateur de multiplication par la fonction $p_i \in C(X/E)$. Ces opérateurs de position sont identiques aux opérateurs introduits par A. Chakrabarti [13], [14], [15].

Proposition : les opérateurs de position $-i v_\mu(x_i)$ sont essentiellement auto-adjoints sur S_F^{2c} .

Démonstration : les champs de vecteurs $\gamma(x_i)$ sont globalement intégrables : dans la carte (x, p, z) on a

$$\exp t \gamma(x_i) \{x_j, p^k, z\} = \{x_j, p^k - \delta_i^k t, z\} ;$$

donc x_i vérifie les hypothèses de la proposition 3 du chapitre I, et d'autre part

$$D(x_i) \equiv \{s \in S_F^{2c} ; v(x_i) s \in S_F^{2,c}\} = S_F^{2c}$$

puisque $E/D \simeq S_2$ est compact.

"Traduit" dans la représentation de Wigner, ce résultat est le suivant : les opérateurs de position (6.1) (opérateurs de Chakrabarti) sont essentiellement auto-adjoints sur le domaine.

$$\mathcal{D} = C_0^\infty(X/E) \otimes V ;$$

C_0^∞ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact.

Les orbites "physiques" X correspondant à des particules de masse nulle sont les surfaces d'équation

$$p^2 = 0 \quad , \quad w^2 = 0 \quad , \quad w_\alpha = \lambda p_\alpha \quad , \quad p^0 > 0 \quad .$$

X est de dimension 6.

On vérifie que la condition d'intégrabilité ($[\omega]$ entière) donne $2\lambda \in \mathbb{Z}$. La représentation de $\mathbb{P}$ correspondante est (d'après (A.V.3)) la représentation $[0, \lambda, +]$ (masse nulle, hélicité λ , énergie positive).

A. Hélicité nulle ($\lambda = 0$)

On obtient un espace homogène symplectique (X, ω) isomorphe à cette orbite en utilisant la méthode du chapitre II (avec $m = 0$), avec les notations de ce chapitre on a donc

$$X \simeq \mathbb{R}^6 \setminus \{p_i = 0\} \quad ,$$

$$\omega = dp_i \wedge dq^i \quad ,$$

où l'on a posé

$$q^i = x^i - \frac{x^0}{\sqrt{p^2}} p^i \quad .$$

L'action du groupe $\mathbb{P}$ s'écrit

$$q' = \left\{ 1 + \frac{k x k}{1 + \sqrt{k^2 + 1}} \right\} Rq - \frac{(k, Rq) + a^0}{\sqrt{k^2 + 1} \sqrt{p^2} + (k, Rp)} - \left\{ \sqrt{p^2} k + \left\{ 1 + \frac{k x k}{1 + \sqrt{k^2 + 1}} \right\} Rp \right\} + a \quad ,$$

$$p' = \sqrt{p^2} k + \left\{ 1 + \frac{k x k}{1 + \sqrt{k^2 + 1}} \right\} Rp \quad .$$

Les variables de position sont encore les fonctions q^j et l'on a

$$-i v_\mu(q^j) = -i \frac{\partial}{\partial p_j} + \frac{i}{2} \frac{p^j}{p^2} \quad ;$$

ces opérateurs sont essentiellement auto-adjoints sur S_F^{2c} , c'est-à-dire, dans la représentation de Wigner sur $C_0^\infty(X/E)$.

B. Hélicité non nulle ($\lambda \neq 0$)

On remarque que, si $\lambda \neq 0$ on a $[\omega] \neq 0$, en effet les surfaces $\{p^2 = 0, w^2 = 0, w_\alpha = \lambda p_\alpha, p^0 > 0\}$ telles que $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ se déduisent les unes des autres par homothétie, donc si l'on avait $[\omega] = 0$ pour une valeur de λ on aurait $[\omega] = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ce qui est impossible puisque la classe $[\omega]$ n'est entière que pour $2\lambda \in \mathbb{Z}$; donc il n'existe pas de fonctions $q^i \in C(X)$ telles que $\omega = dp_i \wedge dq^i$ (les fonctions $p_i \in C(X)$ définies en V.1 sont les variables d'impulsion) donc il n'existe pas de fonctions $q^i \in C(X)$ telles que

$$[q^i, q^j] = 0 \quad [q^i, p_j] = \delta_j^i,$$

en effet, supposons qu'il existe de telles fonctions, $\forall x \in X$, on a

$$\omega \left(\left. \frac{\partial}{\partial q^i} \right|_x, \left. \frac{\partial}{\partial p_j} \right|_x \right) = \delta_i^j,$$

donc les vecteurs $\left. \frac{\partial}{\partial q^i} \right|_x, \left. \frac{\partial}{\partial p_j} \right|_x$ forment une base du plan tangent X_x ,

on peut donc prendre q^i et p_j comme coordonnées.

On a alors

$$\omega = A^j_k(p, q) dp_j \wedge dq^k,$$

et

$$\gamma(q^i) = a_j^i \frac{\partial}{\partial p_j} + b^{ik} \frac{\partial}{\partial q^k},$$

$$a, b, c, d \in C(X)$$

$$\gamma(p_i) = c_{ij} \frac{\partial}{\partial p_j} + d_i^k \frac{\partial}{\partial q^k},$$

de

$$[q^i, p_j] \equiv \gamma(q^i) p_j \equiv -\gamma(p_j) q^i = \delta_j^i$$

on tire

$$a_j^i = \delta_j^i \quad d_i^k = -\delta_i^k ;$$

d'autre part

$$d q_i = i(\gamma(q_i) \omega = a_j^i A_k^j(p, q) d q^k - b^{ik} A_k^j(p, q) d p_j ,$$

donc

$$a_j^i A_k^j(p, q) \equiv \delta_j^i A_k^j(p, q) \equiv A_k^i(p, q) = \delta_k^i ,$$

d'où

$$\omega = d p_j \wedge d q^j ,$$

ce qui est impossible.

On trouve donc que pour des particules de masse nulle et d'hélicité non nulle, il n'existe pas de fonctions sur X que l'on puisse interpréter comme des variables de position, donc il n'existe pas d'opérateur de position : ce résultat a déjà été obtenu à partir d'hypothèses plus "physiques" par Wightman [12] et par Chakrabarti [13], [14], [15].

VI. LE GROUPE $SL(2, \mathbb{R})$

On pourrait espérer -et Kostant le conjecturait dans les notes que nous possédons- que :

1. si X est un espace homogène, la représentation canonique β_{1F} est irréductible.
2. toutes les représentations unitaires irréductibles d'un groupe de Lie sont de la forme β_{1F} .

Le groupe $SL(2, \mathbb{R})$ fournit des contre-exemples à ces deux conjectures :

- il existe une orbite $X \in \mathcal{G}^*$ (le cône) et un F.L.C. sur X tel que la représentation β_{1F} correspondante n'est pas irréductible.
- les représentations de la série complémentaire ne sont équivalents à aucune représentation canonique construite sur un espace homogène X ; le problème reste ouvert de savoir si elles peuvent être obtenues à partir d'une variété X qui n'est pas un espace homogène^{*}.

VI.1 Le groupe $SL(2, \mathbb{R})$ et son recouvrement universel

Le groupe $SL(2, \mathbb{R})$ des matrices réelles $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, $ad - bc = 1$ est isomorphe au groupe $\tilde{G} = SU(1, 1)$ des matrices $\begin{vmatrix} a & b \\ \bar{b} & a \end{vmatrix}$, $|a|^2 - |b|^2 = 1$. Ce groupe n'est pas simplement connexe ($\pi_1(\tilde{G}) \sim \mathbb{Z}$), on désignera par G son recouvrement universel qui sera décrit ci-dessous.

^{*}Lorsque l'espace S_F est constitué de sections holomorphes, la décomposition de X en espaces homogènes n'implique pas a priori que la représentation est réductible.

Avec des notations analogues à celles du chapitre IV, on pose :

$$J_0 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{vmatrix} \quad J_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad J_2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{vmatrix}$$

$$[J_0, J_1] = J_2 \quad [J_0, J_2] = -J_1 \quad [J_1, J_2] = -J_0 .$$

On a (dans $\hat{G}$)

$$\exp t J_0 = \begin{vmatrix} e^{it/2} & 0 \\ 0 & e^{-it/2} \end{vmatrix} \quad \exp t J_1 = \begin{vmatrix} \operatorname{ch} \frac{t}{2} & \operatorname{sh} \frac{t}{2} \\ \operatorname{sh} \frac{t}{2} & \operatorname{ch} \frac{t}{2} \end{vmatrix} \quad \exp t J_2 = \begin{vmatrix} \operatorname{ch} \frac{t}{2} & i \operatorname{sh} \frac{t}{2} \\ -i \operatorname{sh} \frac{t}{2} & \operatorname{ch} \frac{t}{2} \end{vmatrix}$$

Dans la base J_0, J_1, J_2 on a :

$$\operatorname{Ad} \left(\begin{vmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} a\bar{a} + b\bar{b} & i(a\bar{b} - b\bar{a}) & -(a\bar{b} + b\bar{a}) \\ -i(ab - \bar{a}\bar{b}) & \frac{1}{2}(a^2 + \bar{a}^2 - b^2 - \bar{b}^2) & \frac{i}{2}(a^2 - \bar{a}^2 + b^2 - \bar{b}^2) \\ -(ab + \bar{a}\bar{b}) & \frac{1}{2}(a^2 - \bar{a}^2 - b^2 + \bar{b}^2) & \frac{i}{2}(a^2 + \bar{a}^2 + b^2 + \bar{b}^2) \end{vmatrix}$$

$\operatorname{Ad} \left(\begin{vmatrix} a & -b \\ -b & a \end{vmatrix} \right)^t$ est représenté par la même matrice dans la base $P^0, -P^1, -P^2$

$$(\langle P^i, J_k \rangle = \delta_k^i) .$$

VI.2 Paramétrages de $\tilde{G}$, description de G

L'action naturelle de $\tilde{G}$ sur $P(1, \emptyset)$ n'est pas transitive. $P(1, \emptyset)$ est décomposé en trois orbites : dans la carte définie par

$z = \frac{z_1}{z_2}$ les régions $|z| < 1$, $|z| = 1$, $|z| > 1$ sont stables.

Dans cette carte l'action de $\hat{G}$ s'écrit $z' = \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$.

a - Le stabilisateur du point $z=0$ est le groupe des matrices

$$\begin{vmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{vmatrix}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$$

et tout élément de $\hat{G}$ admet une décomposition unique de la forme

$$g = \begin{vmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{vmatrix} = (1-z\bar{z})^{-1/2} \begin{vmatrix} 1 & z \\ \bar{z} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{vmatrix}, \quad \text{où} \quad \begin{aligned} \varphi &= \text{Arg } a \\ z &= \frac{b}{\bar{a}} \end{aligned} \quad (2.1)$$

et l'on a $g\{0\} = \{z\} \quad (\{0\}, \{z\} \in P(1, \mathcal{C}))$.

Cette décomposition permet de décrire simplement le groupe G (voir [5]) :

$\tilde{G}$ est l'ensemble des couples $(z, \varphi) \quad z \in \mathcal{C}, \quad |z| < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$ muni de la loi

$$(z, \varphi)(z', \varphi') = \left(\frac{z + z' e^{2i\varphi}}{1 + \bar{z}z' e^{2i\varphi}}, \quad \varphi + \varphi' + \frac{1}{2i} \log \frac{1 + z\bar{z}' e^{-2i\varphi}}{1 + \bar{z}z' e^{2i\varphi}} \right).$$

Le groupe G est alors l'ensemble des couples $(z, \varphi) \quad z \in \mathcal{C}, \quad |z| < 1, \quad \varphi \in \mathbb{R}$ muni de la même loi où l'addition modulo 2π est remplacée par l'addition ordinaire (l'argument^{du}/logarithme est un nombre complexe de module 1, différent de -1 , et $\log$ signifie détermination principale du logarithme).

Le centre C de G est le groupe $\{(0, \pi n), n \in \mathbb{Z}\}$ et $\tilde{G} = G/C^2$
 $C^2 = \{\gamma \mid \gamma = g^2, g \in C\}.$

G agit sur $P(1, \mathcal{C})$ par l'intermédiaire de $\tilde{G}$ donc le stabilisateur dans G du point $z=0$ est le groupe $(0, \varphi)$ et $(z, \varphi)\{0\} = \{z\}.$

b) - L'espace homogène défini par $|z| > 1$ est isomorphe du précédent, il fournit néanmoins un paramétrage utile (et différent du précédent).

On pose $Z = \frac{z_2}{z_1}$, l'action de $\tilde{G}$ s'écrit donc

$$z' = \frac{\bar{a}Z + \bar{b}}{bZ + a};$$

$$\text{et l'on a } (g\{0\} = \{Z\})$$

$$g = \begin{vmatrix} a & b \\ \bar{a} & \bar{b} \end{vmatrix} = (1 - Z\bar{Z})^{-1/2} \begin{vmatrix} 1 & \bar{Z} \\ Z & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} \varphi &= \arg a \\ Z &= \frac{\bar{b}}{a} \end{aligned} \quad (2.2)$$

la loi de multiplication dans G s'écrit avec ces variables.

$$(Z, \varphi), (Z', \varphi') = \left(\frac{Z + Z' e^{-2i\varphi}}{1 + \bar{Z}Z' e^{-2i\varphi}}, \varphi + \varphi' + \frac{1}{2i} \log \frac{1 + \bar{Z}Z' e^{-2i\varphi}}{1 + Z\bar{Z}' e^{2i\varphi}} \right).$$

c) - Le stabilisateur dans $\tilde{G}$ du point $z = 1$ est le groupe des matrices

$$\pm \begin{vmatrix} 1+i\alpha & -i\alpha \\ i\alpha & 1-i\alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \operatorname{ch} \eta & \operatorname{sh} \eta \\ \operatorname{sh} \eta & \operatorname{ch} \eta \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} \operatorname{ch} \eta + i\alpha e^{\eta} & \operatorname{sh} \eta - i\alpha e^{\eta} \\ \operatorname{sh} \eta + i\alpha e^{\eta} & \operatorname{ch} \eta - i\alpha e^{\eta} \end{vmatrix} \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \eta \in \mathbb{R});$$

(c'est donc un groupe à deux nappes connexes -le stabilisateur de $z = 1$ dans G est le produit direct de sa composante connexe par le centre C) et l'on obtient le paramétrage :

$$g = \begin{vmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \operatorname{ch} \eta + i\alpha e^{\eta} & \operatorname{sh} \eta - i\alpha e^{\eta} \\ \operatorname{sh} \eta + i\alpha e^{\eta} & \operatorname{ch} \eta - i\alpha e^{\eta} \end{vmatrix} \quad (0 \leq \varphi < 2\pi) \quad (2.3)$$

avec $g\{1\} = \{e^{i\varphi}\}$.

Orbites dans $\mathcal{G}^*$

Les orbites dans $\mathcal{G}^*$ sont les hyperboloïdes (et le cône) d'équation $p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 = \text{Cte}$.

VI.3 Hyperboloïdes à deux nappes

Chaque nappe X est une orbite et l'on distingue sur chacune d'elles le point $f = +\lambda P_0^0$ ($\lambda > 0$). Le stabilisateur de f est donc

$$\text{dans } \tilde{G} : \tilde{G}_f = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}, 0 \leq \varphi < 2\pi \right\}$$

$$\text{dans } G : G_f = \{(0, \varphi), \varphi \in \mathbb{R}\} ;$$

$G_f(\tilde{G}_f)$ est connexe, son algèbre de Lie est $\mathcal{G}_f = \mathbb{R} J_0$.

Si $f = -\lambda P_0^\bullet$ en utilisant la décomposition (2.1) on obtient sur X la carte (globale) :

$$p_0 = -\lambda \frac{1 + z\bar{z}}{1 - z\bar{z}}$$

$$p_1 = -i\lambda \frac{(z - \bar{z})}{1 - z\bar{z}}$$

$$p_2 = -\lambda \frac{z + \bar{z}}{1 - z\bar{z}} .$$

$$z = i \frac{p_1 + ip_2}{\lambda - p_0}$$

Dans cette carte, on a

$$\psi^\xi(P) = \frac{-\lambda}{1 - z\bar{z}} \{ \xi^0(1 + z\bar{z}) + i \xi^1(z - \bar{z}) + \xi^2(z + \bar{z}) \} \quad \xi = \zeta^i J_i \in \mathcal{G} ;$$

*On pourrait bien entendu utiliser arbitrairement la décomposition (2.1) ou (2.2) dans tous les cas ; la notation employée ici a l'avantage de faire apparaître dans tous les cas des fonctions holomorphes ; elle est également conforme aux notations de Bargmann [5].

et

$$\sigma(J_0) = -iz \frac{\partial}{\partial z} + i \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

$$\sigma(J_1) = -\frac{1}{2} (1 - z^2) \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{2} (1 - \bar{z}^2) \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

$$\sigma(J_2) = -\frac{i}{2} (1 + z^2) \frac{\partial}{\partial z} - \frac{i}{2} (1 + \bar{z}^2) \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

$$\omega = + 2i\lambda \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1 - z\bar{z})^2}.$$

Si $f = \lambda P_0$ on utilise la décomposition (2.2), il vient

$$p_0 = + \lambda \frac{1 + Z\bar{Z}}{1 - Z\bar{Z}}$$

$$p_1 = -i\lambda \frac{Z - \bar{Z}}{1 - Z\bar{Z}} \quad Z = i \frac{p_1 - ip_2}{\lambda + p_0}$$

$$p_2 = + \lambda \frac{Z + \bar{Z}}{1 - Z\bar{Z}}$$

et

$$\sigma(J_0) = iZ \frac{\partial}{\partial Z} - i\bar{Z} \frac{\partial}{\partial \bar{Z}}$$

$$\sigma(J_1) = -\frac{1}{2} (1 - Z^2) \frac{\partial}{\partial Z} - \frac{1}{2} (1 - \bar{Z}^2) \frac{\partial}{\partial \bar{Z}}$$

$$\sigma(J_2) = \frac{i}{2} (1 + Z^2) \frac{\partial}{\partial Z} - \frac{i}{2} (1 + \bar{Z}^2) \frac{\partial}{\partial \bar{Z}}$$

$$\omega = - 2i\lambda \frac{dZ \wedge d\bar{Z}}{(1 - Z\bar{Z})^2}.$$

Polarisation F. Algèbres C_F , C_F^1

Soit $\mathfrak{h}_f = \mathcal{O} J_0 \oplus \mathcal{O} (\alpha J_1 + \beta J_2)$,
il faut que $[J_0, (\alpha J_1 + \beta J_2)] = -\beta J_1 + \alpha J_2 \in \mathfrak{h}_f$.
Soit $\alpha = \frac{+}{-} i\beta$, donc deux solutions

$$\mathfrak{h}_{-\lambda P_0} = \mathcal{O} J_3 \oplus \mathcal{O} (J_1 + i J_2) = \overline{\mathfrak{h}_{\lambda P_0}}$$

$$\overline{\mathfrak{h}_{\lambda P_0}} = \mathcal{O} J_3 \oplus \mathcal{O} (J_1 - i J_2) = \mathfrak{h}_{\lambda P_0}.$$

Donc F est engendrée par le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ (respectivement $\frac{\partial}{\partial \bar{Z}}$).

(X, ω, F) est donc une variété kählérienne.

C_F est l'espace des fonctions holomorphes sur X

et C_F^1 est l'espace des fonctions de la forme

$$\varphi(z) = \frac{\alpha(z)\bar{z} + \beta(z)}{1 - z\bar{z}} \left(\varphi(Z) = \frac{\alpha(Z)\bar{Z} + \beta(Z)}{1 - Z\bar{Z}} \right) \text{ avec } \alpha \text{ et } \beta$$

holomorphes.

(On a bien $\psi^\xi \in C_F^1 \quad \forall \xi \in \mathcal{G}$).

Sections holomorphes du fibré L

X est simplement connexe donc $\mathcal{L}_\omega = \mathcal{K}_\omega$ contient un unique élément 1. On identifie l'espace S des sections du fibré L correspondant à l'espace de fonction $\hat{S}$ sur G défini en (A.V.1).

Bargmann [5] introduit (pour $\tilde{G}$) les multiplicateurs :

$$\mu^+(g, Z) = (bZ + a)^k \quad \mu^-(g, z) = (\bar{b}z + \bar{a})^k \quad k \in \mathbb{Z} \quad .$$

$$\left(g = \begin{vmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{vmatrix} \right) \quad .$$

On sait (voir appendice VI.7) que

$$\mu(gh, 0)^{-1} = \rho(h)^{-1} \mu(g, 0)^{-1} \quad \forall h \in G_f \quad ,$$

où ρ est la représentation de $\tilde{G}_f$ définie par μ (ici $\rho(h) = \mu(h, 0)$ car il existe une mesure invariante sur $X = \tilde{G}/\tilde{G}_f$).

On pose

$$\tilde{\psi}_0^{(k)}(g) = \mu^+(g, 0)^{-1} = a^{-k} \quad , \quad \tilde{\psi}_0^{(k)} = \mu^-(g, 0)^{-1} = (\bar{a})^{-k} \quad .$$

Ces fonctions définissent sur G les fonctions

$$\varphi_0^{(k)}((\zeta, \varphi)) = ((1 - \zeta \bar{\zeta})^{-\frac{1}{2}} e^{i\varphi})^{-k} = (1 - \zeta \bar{\zeta})^{k/2} e^{-ik\varphi} \quad , (3.1)$$

$$\psi_0^{(k)}((\zeta, \varphi)) = ((1 - \zeta \bar{\zeta})^{-\frac{1}{2}} e^{-i\varphi})^{-k} = (1 - \zeta \bar{\zeta})^{k/2} e^{ik\varphi} \quad . (3.2)$$

Les égalités (3.1), (3.2) définissent les fonctions $\varphi_0^{(k)}$, $\psi_0^{(k)}$ pour $k \in \mathbb{R}$. Ces fonctions vérifient les égalités :

$$\varphi_0^{(k)}((\zeta, \varphi)(0, \theta)) = e^{-ik\theta} \varphi_0^{(k)}((\zeta, \varphi)) \quad ,$$

$$\psi_0^{(k)}((\zeta, \varphi)(0, \theta)) = e^{ik\theta} \psi_0^{(k)}((\zeta, \varphi)) \quad .$$

Donc si $f = \lambda P_0$

$\varphi_0^{(k)}$ définit une section du fibré L sur X si $k = 4\pi\lambda$, de même $\psi_0^{(k)}$ si $k = -4\pi\lambda$.

Si $f = -\lambda P_0$,

$\psi_0^{(k)}$ définit une section si $k = 4\pi\lambda$ et $\varphi_0^{(k)}$ si $k = -4\pi\lambda$.

On désigne par s_0 (s'_0) la section définie par $\varphi_0^{(4\pi\lambda)}$ ($\psi_0^{(-4\pi\lambda)}$) si $f = \lambda P_0$ et par $\psi_0^{(4\pi\lambda)}$ ($\varphi_0^{(-4\pi\lambda)}$) si $f = -\lambda P_0$ - $\varphi_0^{(k)}$ ($\psi_0^{(k)}$) ne s'annulant pas, on a $s_0(X) \subset L^*$.

D'autre part, on a :

$$\Delta(J_1 - iJ_2) \varphi_0^{(k)} = 0 \quad \Delta(J_1 + iJ_2) \psi_0^{(k)} = 0$$

donc $s_0 \in S_F$ ($s'_0 \in S_{\overline{F}}$) .

Les éléments de S_F sont donc de la forme θs_0 où θ est une fonction holomorphe sur X .

Les résultats de Bargmann prouvent que :

1. si $f = \lambda P_0$ $a/\lambda > \frac{1}{4\pi}$ ($k = 4\pi \lambda > 1$)

S_F contient un sous-espace $V_{1,F}$ de sections de carré sommable et la représentation $\beta_{1,F}$ de G dans $V_{1,F}$ est la représentation irréductible D_k^+ , $k > 1$ (ce n'est une représentation de $\tilde{G}$ que si $k \in \mathbb{Z}$). $S_{\overline{F}}$ ne contient pas d'élément non nul de carré intégrable.

$b/\lambda \leq \frac{1}{4\pi}$ ni S_F ni $S_{\overline{F}}$ ne contiennent d'éléments de carré sommable.

2. si $f = -\lambda P_0$ $a/\lambda > \frac{1}{4\pi}$ ($k > 1$)

On obtient de même la représentation D_k^- ($k > 1$) dans $V_{1,F} \subset S_F$.

$S_{\overline{F}}$ ne contient pas de sections de carré intégrable

$b/\lambda \leq \frac{1}{4\pi}$ S_F et $S_{\overline{F}}$ ne contiennent pas de sections de carré intégrable.

VI.4 Hyperbolofdes à une nappe

On distingue sur X le point $f = \lambda P^1$ ($\lambda > 0$).

Le stabilisateur de f dans $\tilde{G}(G)$ est donc

$$\tilde{G}_f = \left\{ \pm \begin{vmatrix} \operatorname{ch} \eta & \operatorname{sh} \eta \\ \operatorname{sh} \eta & \operatorname{ch} \eta \end{vmatrix}, \eta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(G_f = \{(z, \varphi) \mid z \in \mathbb{R} \ (|z| < 1), \varphi = n\pi, n \in \mathbb{Z}\})$$

$G_f(\tilde{G}_f)$ est le produit direct de sa composante connexe $G_f^0(\tilde{G}_f^0)$ par le centre $C(\tilde{C})$ de $G(\tilde{G})$.

L'algèbre de Lie de G_f^0 est $\mathcal{G}_f = \mathbb{R} J_1$.

La polarisation F

On pose $\mathcal{H}_f = \mathcal{O} J_1 \oplus \mathcal{O}(\alpha J_0 + \beta J_2)$,

$[J_1, (\alpha J_0 + \beta J_2)] = -\alpha J_2 - \beta J_0 \in \mathcal{H}_f$ entraîne $\alpha = \pm \beta$.

Il y a donc deux polarisations G-invariantes sur X définies respectivement par

$$\mathcal{H}_f^{(1)} = \mathcal{O} J_1 \oplus \mathcal{O} (J_0 - J_2)$$

$$\mathcal{H}_f^{(2)} = \mathcal{O} J_1 \oplus \mathcal{O} (J_0 + J_2) .$$

Ces polarisations sont donc réelles ; les variétés intégrales $D_p^{(1)}$ ($D_p^{(2)}$), $p \in X/D$, sont les droites appartenant respectivement à l'un ou l'autre système de génératrices rectilignes de X.

Les groupes $\tilde{D}_f^{(i)} = \exp \mathfrak{D}_f^{(i)}$. $\tilde{G}_f \subset \tilde{G}$ ($i=1,2$) sont respectivement

$$\tilde{D}_f^{(1)} = \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \left| \begin{array}{cc} 1+i\alpha & -i\alpha \\ +i\alpha & 1-i\alpha \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} \operatorname{ch} \eta & \operatorname{sh} \eta \\ \operatorname{sh} \eta & \operatorname{ch} \eta \end{array} \right| , \quad \alpha \in \mathbb{R} , \quad \eta \in \mathbb{R} \right\} ;$$

$$\tilde{D}_f^{(2)} = \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \left| \begin{array}{cc} 1+i\alpha & i\alpha \\ -i\alpha & 1-i\alpha \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} \operatorname{ch} \eta & \operatorname{sh} \eta \\ \operatorname{sh} \eta & \operatorname{ch} \eta \end{array} \right| , \quad \alpha \in \mathbb{R} , \quad \eta \in \mathbb{R} \right\} .$$

Les groupes $D_f^{(i)} \subset G$ correspondants sont les produits de leur composantes connexe $D_f^{o(i)}$ (isomorphe à $\tilde{D}_f^{o(i)}$) par le centre C.

On vérifie que, dans l'action de G sur le cercle $T = \{z \in \mathcal{O}, |z| = 1\}$ définie en (VI.2.c) $D_f^{(1)}$ ($D_f^{(2)}$) est le stabilisateur du point $z=1$ ($z=-1$) (ces deux groupes sont donc conjugués dans G). On a donc $X/E^{(1)} \simeq X/E^{(2)} \simeq T$.

On pose $\theta = \operatorname{Arg} z$; $v = d\theta$ est une mesure quasi invariante sur T.

Le multiplicateur (VI.7) $\zeta : \tilde{G} \times T \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ défini par v s'écrit :

$$\zeta(a, \theta) = |\bar{\beta} e^{i\theta} + \alpha| \quad a = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{vmatrix} \in \tilde{G} \quad \theta \in T .$$

Le multiplicateur correspondant sur $G \times T$ s'écrit :

$$\zeta((z, \varphi), \theta) = (1 - z\bar{z})^{-\frac{1}{2}} |\bar{z} e^{i\varphi} e^{i\theta} + e^{-i\varphi}| .$$

On introduit [5] les multiplicateurs :

$$\tilde{\mu}_0^\sigma(a, \theta) = |\bar{\beta} e^{i\theta} + \bar{\alpha}|^{1+2i\sigma}$$

$$\tilde{\mu}_{1/2}^\sigma(a, \theta) = |\bar{\beta} e^{i\theta} + \bar{\alpha}|^{1+2i\sigma} \frac{\bar{\beta} e^{i\theta} + \bar{\alpha}}{|\bar{\beta} e^{i\theta} + \bar{\alpha}|} ,$$

pour $\tilde{G}$ et pour G :

$$\mu_h^\sigma((z, \varphi), \theta) = \left\{ \frac{|\bar{z} e^{i\varphi} e^{i\theta} + e^{-i\varphi}|}{(1 - z\bar{z})^{1/2}} \right\}^{1+2i\sigma} e^{-2ih\varphi} \left(\frac{1 + \bar{z} e^{2i\varphi} e^{i\theta}}{1 + z e^{-2i\varphi} e^{-i\theta}} \right)^h .$$

($0 \leq h < 1$).

On note $\rho_h^{(i)\sigma}$ la représentation de $D_f^{(i)}$ ($i=1,2$) définie (VI.7) par le multiplicateur μ_h^σ , soit

$$\rho_h^{(1)\sigma}(d) = \mu_h^\sigma(d, 0) \zeta(d, 0)^{-1} \quad d \in D_f^{(1)} ,$$

$$\rho_f^{(2)\sigma}(d) = \mu_h^\sigma(d, \pi) \zeta(d, \pi)^{-1} \quad d \in D_f^{(2)} .$$

On a

$$d\rho_h^{(1)\sigma} = 2i\pi f \Big|_{\mathfrak{D}_f^{(1)}} \quad \text{si} \quad \sigma = 2\pi\lambda ,$$

$$d\rho_h^{(2)\sigma} = 2i\pi f \Big|_{\mathfrak{D}_f^{(2)}} \quad \text{si} \quad \sigma = -2\pi\lambda ,$$

les représentations $\rho_h^{(1)2\pi\lambda}$ et $\rho_h^{(2)-2i\lambda}$ s'identifient donc aux représentations $\hat{l}_h^{(1)}$ et $\hat{l}_h^{(2)}$ de $D_f^{(1)}$ et $D_f^{(2)}$ définies en (A.V.2) (h déter-

mine $1_h \in \mathcal{K}_w$). Pour λ fixé, on obtient donc, pour chaque valeur de h , deux représentations équivalentes $\beta_{1_h F(i)} \nu$ équivalentes entre elles et équivalentes à la représentation de la série principale $C_q^h \sim (0 \leq h < 1, q = \frac{1}{4} + \sigma^2)$. Ces représentations sont des représentations de G pour $h=0$ et $h=\frac{1}{2}$.

VI.5 Le cône

Chaque nappe du cône est une orbite ; on désigne par X la nappe définie par $p_0 > 0$.

Sur X on distingue le point $f = P^0 + P^2$, on a

$$\tilde{G}_f = \left\{ \pm \begin{vmatrix} 1+i\alpha & -i\alpha \\ i\alpha & 1-i\alpha \end{vmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$\tilde{G}_f$ (G_f : le stabilisateur de f dans G) est le produit de sa composante connexe $\tilde{G}_f^0$ (G_f^0) par le centre $\tilde{C}(C)$. L'algèbre de Lie de G_f^0 est $\mathcal{G}_f = \mathbb{R}(J_0 - J_2)$.

Polarisation

F , définie par l'algèbre $\mathcal{G}_f = \mathcal{C}(J_0 - J_2) \oplus \mathcal{C}J_1$. La polarisation est réelle, les variétés intégrales $X/D = X/E$ sont les génératrices rectilignes du cône.

Le groupe $D_f(\tilde{D}_f)$ est égal au groupe $D_f^{(1)}(\tilde{D}_f^{(1)})$ du paragraphe précédent, on a donc $X/E \simeq T$. Le multiplicateur μ_h^σ définit la représentation ρ_h^σ de D_f et l'on a $d\rho_h^\sigma|_{\mathfrak{D}_f} = 0$ si $\sigma = 0$.

La représentation $\beta_{1_h F(i)} \nu$ de G s'identifie donc à la représentation induite par la représentation ρ_h^0 de D_f . D'après les résultats de [5] on a :

1. si $0 \leq h < 1$ $h \neq 1/2$ la représentation $\beta_{1/h F, \nu}$ est irréductible et équivalente à la représentation de la série principale $C_{1/4}^h$.
2. si $h = 1/2$ la représentation $\beta_{1/2 F, \nu}$ est réductible et équivalente à la somme directe des deux représentations de la série discrète $D_{1/2}^+ \oplus D_{1/2}^-$.

On a donc ici un exemple où la représentation canonique $\beta_{1/h F, \nu}$ est réductible, ce qui contredit la conjecture (1).

La nappe inférieure du cône X' conduit aux mêmes représentations, en effet si l'on pose $-f = f' \in X'$ on a évidemment $G_f = G_{f'}$, $D_f = D_{f'}$, $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f'}$ et comme $f|_{\mathcal{D}_f} = 0$ on a $d\rho_h^\sigma = 2i\pi f'|_{\mathcal{D}_{f'}}$ si $\sigma = 0$.

VI.6 Les espaces $H^k(X, \underset{\sim}{S}_F)$

On constate que l'on n'a pas obtenu toutes les représentations de G (contrairement à la conjecture (2)) : on n'a pas obtenu les représentations appartenant à la série complémentaire (lesquelles sont induites par des représentations non unitaires) et, en toute rigueur on n'a pas obtenu les représentations de la série discrète D_1^- : il n'y a pas de sections holomorphes de carré sommable au-dessus des orbites correspondantes (Bargmann les obtient en redéfinissant le produit scalaire au moyen d'une limite).

Dans ce paragraphe on examine une suggestion de Kostant [2] : l'espace S_F à partir duquel on construit la représentation canonique s'identifie à $H^0(X, \underset{\sim}{S}_F)$ où $\underset{\sim}{S}_F$ désigne le faisceau des germes de sections $X \rightarrow L$ appartenant à S_F , l'idée est d'essayer de faire agir le groupe G sur $H^k(X, \underset{\sim}{S}_F)$ (et éventuellement sur un espace hilbertien à définir à partir de cet espace).

Malheureusement, on ne peut rien obtenir de plus de cette façon dans le cas particulier étudié ici : $G = SL(2, \mathbb{R})$, en effet on a

$$H^k(X, \underline{S}_F) = 0, \forall X \subset \mathcal{G}^*, \forall k \neq 0 :$$

1. si X est une nappe d'un hyperboloïde à deux nappes, il existe une section globale holomorphe ne s'annulant pas au-dessus de X (c'est-à-dire appartenant à $\underline{S}_F$) : $H^*(X, \underline{S}_F)$ est donc isomorphe à la $\bar{\partial}$ -cohomologie du disque $\{|z| < 1\}$, celle-ci est nulle pour $k \neq 0$.
2. si X est soit une hyperboloïde à une nappe, soit une nappe du cône, il existe une section s_0 globale ne s'annulant pas, ^{appartenant} à $\underline{S}_F$ (puisque'il existe un multiplicateur différentiable) ; toute section $s \in \underline{S}_F$ est donc de la forme $s = f s_0$ où $f \in C(X)$ est une fonction constante le long de F , f définit donc une fonction $f : X/E \rightarrow \mathcal{C}$ différentiable, donc $H^k(X, \underline{S}_F) \simeq H^k(X/E, \mathcal{C})$ où $\mathcal{C}$ est le faisceau des germes de fonctions à valeurs complexes sur X/E , donc $H^k(X, \underline{S}_F) = 0$ si $k \neq 0$ puisqu'il existe des partitions de l'unité différentiables à valeurs complexes sur X/E .

VI.7 Appendice : multiplicateurs et représentations induites

On a construit la représentation canonique $\beta_{1, F, \mu}$ d'un groupe G associée à une orbite X dans $\mathcal{G}^*$ comme une représentation induite holomorphe. On a eu dans le chapitre VI à comparer cette représentation avec celles que Bargmann construit au moyen des multiplicateurs. Il est bien connu ([4] par exemple) que le formalisme des représentations induites est un cas particulier du formalisme des multiplicateurs. Il nous a semblé utile de rappeler ici la correspondance entre ces deux méthodes.

1. Représentations induites.

Soient X un espace homogène (à gauche) de groupe $G^\diamond$, $H \subset G$ le stabilisateur de $x_0 \in X$, ρ une représentation unitaire de H dans

[♦]Dans la théorie générale G peut être un groupe localement compact quelconque, on se restreint ici aux groupes de Lie.

un espace hilbertien $\mathcal{K}$, et L le quotient de $G \times \mathcal{K}$ par la relation d'équivalence définie par $(H\rho)$

$$(a, \Psi) \simeq (a', \Psi') \Leftrightarrow \exists h \in H, \quad g' = ah \quad \Psi' = \rho(h)^{-1} \Psi \quad (a \in G, \Psi \in \mathcal{K}).$$

Si ν est une mesure quasi invariante sur X , on désigne par ${}^a\nu$ la transformée de ν par $a \in G$ ($({}^a\nu, {}^af) = (\nu f)$ pour toute fonction f mesurable sur X , avec ${}^af(x) = f(a^{-1}x)$).

$\mathcal{K}_\nu$ est l'espace des sections de L mesurables et de carré ν -sommable. $\mathcal{K}_\nu$ est canoniquement isomorphe à l'espace $\hat{\mathcal{K}}_\nu$ des fonctions $f: G \rightarrow \mathcal{K}$ mesurables telles que :

$$\text{i-} \quad f(gh) = \rho(h)^{-1} f(g) \quad (g \in G, h \in H) \quad (7.1)$$

$$\text{ii-} \quad \int_X |f(g)|^2 d\nu(\dot{g}) < \infty \quad (\dot{g} \text{ est la projection de } g \in G \text{ sur } X).$$

La représentation de G dans $\hat{\mathcal{K}}_\nu$ est définie par

$$(U(a)f)(g) = \sqrt{\frac{{}^a\nu}{\nu}}(\dot{g}) f(a^{-1}g) \quad a \in G, g \in G, \quad (7.2)$$

si $\sigma: X \rightarrow G$ est une section mesurable, on pose $[x] = \sigma(x)$ (donc $[x]x_0 = x$), la représentation s'écrit

$$(U(a)f)([x]) = \sqrt{\frac{{}^a\nu}{\nu}}(x) \rho([x]^{-1} a [a^{-1}x]) f([a^{-1}x]). \quad (7.3)$$

La représentation U est indépendante de ν à l'équivalence unitaire près.

2. Multiplicateurs

E est l'espace des fonctions mesurables sur X à valeur dans un espace de Banach $\mathcal{K}$, le multiplicateur μ est une fonction mesurable $\mu: G \times X \rightarrow GL(\mathcal{K})$ telle que :

$$\begin{aligned} \text{i-} \quad \mu(e, x) &= 1 \quad \forall x \in X \quad e \text{ est l'unité de } G ; \\ \text{ii-} \quad \mu(ab, x) &= \mu(a, bx) \mu(b, x) \quad \forall x \in X ; a, b \in G. \end{aligned} \quad (7.4)$$

La représentation de G dans E est définie par

$$(T(a)f)(x) = \mu(a, a^{-1}x) f(a^{-1}x) . \quad (7.5)$$

$\alpha)$ Résolution des équations fonctionnelles (7.4)

On pose $\mu(h, x_0) = \rho'(h) \quad \forall h \in H$,
 comme $Hx_0 = x_0$ on a $\rho'(h_1 h_2) = \rho'(h_1) \rho'(h_2) \quad \forall h_1, h_2 \in H$,
 et d'autre part $\forall a \in G \quad \mu(ah, x_0) = \mu(a, x_0) \rho'(h)$.

On pose par ailleurs $\beta([x]) = \mu([x], x_0)$,

ρ' et β déterminent complètement μ , en effet

$$\mu(a, x) = \beta([ax]) \rho'([ax]^{-1} a[x]) \beta([x])^{-1} \quad (7.6).$$

Lemme : deux multiplicateurs μ_1 et μ_2 tels que ρ'_1 et ρ'_2 sont équivalentes définissent des représentations T_1 et T_2 équivalentes : deux tels multiplicateurs sont dits équivalents.

Démonstration : on suppose pour simplifier $\rho'_1 = \rho'_2$, on pose

$$S : E \rightarrow E \quad (Sf)(x) = \beta_2([x]) \beta_1([x])^{-1} f(x) .$$

On a

$$ST_1(a)f = T_2(a)Sf \quad \forall a \in G .$$

On peut donc, sans perte de généralité, modifier arbitrairement $\beta([x])$ de sorte que par exemple $\beta([x]) = 1$. Si G est un groupe de Lie, on peut chercher à modifier β de sorte que μ soit une fonction différentiable (G et X sont des variétés différentiables) ; ceci n'est pas toujours possible car $\mu(a, x)$ doit être inversible.

Remarque : si $\mathcal{K} = \mathcal{C}$, l'ensemble des classes d'équivalence de multiplicateurs est, d'après (7.6), le groupe $H^1(G, \mathcal{C}^*(X))$ où $\mathcal{C}^*(X)$ est le G -module des fonctions $G \rightarrow \mathcal{C}^*$ et le lemme peut s'écrire :

$$H^1(G, \mathcal{C}^*(G/H)) = \text{Hom}(H, \mathcal{C}^*) .$$

β) Le multiplicateur défini par une mesure quasi-invariante

Soit ν une mesure quasi-invariante positive, on pose

$$\zeta_\nu(a, a^{-1}x) = \sqrt{\frac{a_\nu}{\nu}}(x) \quad \zeta_\nu(a, a^{-1}x) \in \mathbb{R}_+^* .$$

Lemme : ζ_ν est un multiplicateur pour l'espace des fonctions à valeur dans $\mathcal{K} = \mathcal{C}$.

Démonstration : on a par définition $a_\nu \equiv \zeta_\nu(a, \cdot)^2 \nu$ donc $\forall a, b \in G$

$$(ab) \zeta_\nu(ab, \cdot)^2 \nu \equiv (ab)_\nu = b(a_\nu) = a(b \zeta_\nu(b, \cdot)^2) a_\nu = ab \zeta_\nu(b, \cdot)^2 a \zeta_\nu(a, \cdot)^2 \nu$$

$$\text{soit} \quad \zeta_\nu(ab, \cdot) = \zeta_\nu(b, \cdot)^{b-1} \zeta_\nu(a, \cdot) ,$$

$$\text{ou} \quad \zeta_\nu(ab, x) = \zeta_\nu(b, x) \zeta_\nu(a, bx) \quad \forall x \in X ,$$

$$\text{et d'autre part} \quad \zeta_\nu(e, x) = 1 .$$

Lemme : deux mesures quasi-invariantes positives (donc équivalentes) ν_1 et ν_2 définissent des multiplicateurs équivalents.

Démonstration : il existe une fonction mesurable strictement positive, ω telle que $\nu_2 = \omega \nu_1$ et l'on a

$$\zeta_{\nu_2}(a, x) = \omega(ax)^{-1/2} \zeta_{\nu_1}(a, x) \omega(x)^{1/2} ,$$

donc

$$\rho'_{\nu_2}(h) \equiv \zeta_{\nu_2}(h, x_0) = \zeta_{\nu_1}(h, x_0) \equiv \rho'_{\nu_1}(h) .$$

Ces multiplicateurs définissent donc un homomorphisme

$$\rho_0 : H \rightarrow \mathbb{R}_+^* \quad (\rho_0 = \rho'_v, \forall v) ,$$

(c'est-à-dire une représentation de H dans $\mathcal{C}$) qui ne dépend que de X et de G (en particulier, s'il existe sur X une mesure G -invariante $\rho_0(h) = 1, \forall h \in H$).

γ) Multiplicateurs définissant une représentation unitaire. Equivalence avec le formalisme des représentations induites.

Soit ρ' la représentation de H dans $\mathcal{K}$ définie par μ , on pose $\rho(h) = \rho_0(h)^{-1} \rho'(h)$ (en particulier, $\forall v, \rho_v(h) = 1$). On suppose que $\mathcal{K}$ est un espace hilbertien et que ρ est unitaire, on désigne par $\mathcal{K}'_v$ le sous-espace (hilbertien) de E des fonctions de carré v -sommable.

Lemme : $\mathcal{K}'_v$ est stable par T , la représentation de G dans $\mathcal{K}'_v$ (encore notée T) est isomorphe à la représentation U induite par ρ (agissant dans $\mathcal{K}_v$ (ou $\hat{\mathcal{K}}_v$) définie en (7.1)).

Démonstration : $\mu_v(a, x) = \zeta_v(a, x)^{-1} \mu(a, x)$ est un multiplicateur et l'on a $\mu_v(h, x_0) = \rho(h)$, donc $\mu_v(ah, x_0) = \mu_v(a, x_0) \rho(h)$.

On définit $S : \mathcal{K}'_v \rightarrow \hat{\mathcal{K}}_v \simeq \mathcal{K}_v$ par

$$(Sf)(a) = \mu_v(a, x_0)^{-1} f(ax_0) \quad \forall f \in \mathcal{K}'_v .$$

On a bien $(Sf)(ah) = \rho(h)^{-1} \mu_v(a, x_0)^{-1} f(ax_0) = \rho(h)^{-1} (Sf)(a)$, donc $Sf \in \hat{\mathcal{K}}_v$ et il est évident que S est un isomorphisme. D'autre part,

en posant $\gamma([x]) = \zeta_v([x], x_0)$

$$\begin{aligned} (ST(a)f)([x]) &= \mu_v([x], x_0)^{-1} \mu(a, a^{-1}x) f(a^{-1}x) \\ &= \zeta_v([x], x_0) \mu([x], x_0)^{-1} \mu(a, a^{-1}x) f(a^{-1}x) \\ &= \gamma([x]) \rho'([x]^{-1} a [a^{-1}x]) \beta([a^{-1}x])^{-1} f(a^{-1}x), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (U(a)Sf)([x]) &= \sqrt{\frac{a_v}{v}}(x) \rho([x]^{-1} a [a^{-1}x]) \mu_v([a^{-1}x], x_0)^{-1} f(a^{-1}x) \\ &= \zeta_v(a, a^{-1}x) \rho([x]^{-1} a [a^{-1}x]) \zeta_v([a^{-1}x], x_0) \mu([a^{-1}x], x_0)^{-1} f(a^{-1}x) \\ &= \gamma([x]) \rho_0([x]^{-1} a [a^{-1}x]) \rho([x]^{-1} a [a^{-1}x]) \beta([a^{-1}x])^{-1} f(a^{-1}x), \end{aligned}$$

et, puisque $\rho' = \rho_0 \cdot \rho$ on a $ST(a)f = U(a)Sf$.

Remarque : on suppose que G est un groupe de Lie et que $K = \emptyset$.

Si $\mu_v(a, x_0)$ est une fonction (à valeurs dans $\mathcal{C}^*$) différentiable.

S transforme les fonctions différentiables sur X en des fonctions différentiables sur G vérifiant (7.1), c'est-à-dire en des sections différentiables du fibré L ; ce dernier est donc trivial et S définit un isomorphe entre L et $X \times \mathcal{C}$ (L est trivial car pour tout $f \in \mathcal{K}'_v$, f différentiable, $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in X$ $Sf: X \rightarrow L$ est une section différentiable qui ne s'annule pas).

Si l'on a défini sur X une polarisation F et si la fonction $(a \mapsto \mu_v(a, x_0))$ appartient à $\hat{S}_F(A.V.3)$, elle définit une section globale $s_0: X \rightarrow L$, ne s'annulant pas et appartenant à S_F (donc $s \in S_F \Rightarrow s = f s_0$, $f \in \mathcal{C}_F$).

REFERENCES

- [1] L. Auslander. B. Kostant : Quantification and representations of solvable Lie groups. Bull. Am. Math. Soc. 73(1967) 692.695 .
- [2] B. Kostant : Notes de cours de Iwahori -(manuscrit)-.
- [3] R. Abraham : Foundations of machanics. Benjamin.
- [4] A.A. Kivillov : Unitary representations of nilpotnent Lie groups. Usp. Math. Nauk 106 (1962) 57. 110.
- [5] V. Bargmann : Irreducible unitary representations of the Lorentz group. Ann. of Math. 48.3. (1947).
- [6] E.P. Wigner : Group thory and its application to the quantum mechanics of atomic spectra. Academic Press.
- [8] J.M. Levy-Leblond : Thèse (Orsay).
- [9] T. Kato : Pertubation theory for linear operators. Springer.
- [10] N.I. Akhietzer. J.M. Glazman : Theory of linear operators in Hilbert space. Ungar.
- [11] J.P. Serre : Représentations linéaires et espaces homogènes kähleriens des groupes de Lie compacts. Séminaire Bourbaki. 100.
- [12] A.S. Whigtman : On the localizability of quantum mechanical systems. Rev. of Mod. Phys. 34. 4. (1962).
- [13] A. Chakrabarti : Canonical form of covariant free particles equations. JMP. 4 . 10 (1963) 1215.
- [14] Relativistic position operator for free particles. JMP. 4 . 10 (1963) 1223.
- [15] On the canonical relativistic kinematics of N particles systems. JMP . 5 . 7 (1964) 922.

D E U X I E M E P A R T I E

LES CARACTERES DU GROUPE DE POINCARÉ

INTRODUCTION

The calculation of the characters of the irreducible unitary representations of semi-simple complex Lie groups as solution of partial differential equation has already been carried out by Berezin (Ref. 1). We follow a similar method but which does not use the peculiar structure of semi-simple lie groups and which is valid for a large class of Lie groups. We shall calculate the characters of the Poincaré group P in the following way : we look for central distributions on P , eigenvectors of the Laplace operators $\underline{P}^2$ and $\underline{W}^2$, and - for the characters of the unitary representations - of positive type, extremal. The characters of the non zero mass unitary representations have already been obtained, using a completely different method by H. Joos and R. Schrader (Réf. 11, 12) (after our work was finished, these authors have obtained results in the zero mass case).

In chapter I, we justify and discuss our method, we explain the technique we use to solve partial differential equations, and we prove some related lemmas.

In chapter II, as a first application, we calculate the characters of the (unitary or not) representations of $SL(2\mathbb{R})$.

In chapter III, we give a local expression of the central distributions on P .

The chapter IV, is devoted to the explicit calculation of the characters of P .

- Outside $m^2 = w^2 = 0$, we get the characters of all unitary irreducible representations (the expression we obtain contains a numerical constant that we have not been able to calculate). In addition, we obtain other solutions of our problem (except conditions verified by characters of unitary representations) : we do not know if they are characters of non-unitary representations or not.
- If $m^2 = w^2 = 0$, the initial program fails : we must not only add supplementary equations (to determine helicity) but chiefly change the space of test-functions : the characters of these unitary representations are not distributions. Moreover, these characters have curious properties : they depend upon arguments which are not constant on conjugation classes and are not bounded, although they are of positive type (here again some numerical constants have not been calculated).

Appendices A and C contain some technical calculations ;
appendix B gives some identities related to our parametrization of P.

I - GENERALITIES

1. Definition of a character

a) Let G be any locally compact group and U a strongly continuous representation of G in a Banach space $\mathfrak{B}$.

For any positive measure μ on G such that

$$\int_G \|U(g)\| d\mu(g) < \infty \quad (1.1)$$

($\| \cdot \|$ is the norm in $\mathfrak{L}(\mathfrak{B})$) we define the continuous linear operator :

$$U(\mu) = \int_G U(g) d\mu(g)$$

By linearity we can extend this definition to the complex vector space generated by the μ satisfying condition (1.1) ; this space is an algebra for convolution : the algebra $M_U^1(G)$ of the U -bounded measures on G .

For some of these μ the operators $U(\mu)$ may have a trace i.e. be such that there exists two sequences $x_i \in \mathfrak{B}$, $x'_j \in \mathfrak{B}'$ (dual of $\mathfrak{B}$) with $\|x_i\|, \|x'_j\| < A \forall i, j$, such that we have for any x in $\mathfrak{B}$:

$$U(\mu)x = \sum_i \lambda_i(x'_i, x) x_i$$

with

$$\sum_i |\lambda_i| < \infty$$

By definition then

$$\text{Tr } U(\mu) = \sum_i \lambda_i (x'_i, x_i)$$

The space of these μ , we shall call $A_U(G)$, is a vector space and a two-sided ideal of $M_U^1(G)$ (the product of a trace-class operator by a bounded operator is again a trace-class operator).

The mapping $\mu \rightarrow \text{Tr } U(\mu)$ is a linear form from $A_U(G)$ to $\mathbb{C}$; this form is called the character of U if U is a completely irreducible representation.

b) If U is an unitary representation (on an Hilbert space $\mathcal{H}$) $M_U^1(G) = M^1(G)$ (bounded measures on G). In the case where G is a Lie group we can consider the subspace $\mathfrak{D}(G) \subset M^1(G)$ of infinitely differentiable functions with compact support (the injection being made with help of the left invariant Haar measure dg).

But one does not know yet all general conditions on G and U such that $\mathfrak{D}(G) \subset A_U(G)$; we know that the inclusion is true if G is semi-simple and U an u.i.r. (unitary irreducible representation) (Ref. 2)^(*) ; we know also that for the Poincaré group there are representations for which the inclusion does not hold (Ref.3).

When $\mathfrak{D}(G) \subset A_U(G)$ then the restriction χ of a character to $\mathfrak{D}(G)$ is continuous for the topology of $\mathfrak{D}(G)$ i.e. is a distribution.

2. Properties of characters

When the character of a representation U is a distribution by

$$\langle \chi, \varphi \rangle = \text{Tr } U(\varphi)$$

$$U(\varphi) = \int_G U(g) \varphi(g) dg$$

(*) in this case we even know that the restriction of χ to $\mathfrak{D}(G)$ is a locally integrable function, analytic on the regular elements of G .

G any Lie group (we take it unimodular for simplicity),
 dg the (right and left) invariant Haar measure on G
 $\varphi(g) \in \mathfrak{D}(G)$,
it has the following properties :

a) χ is a central distribution.

If we call δ_γ the Dirac measure on G with support γ :

$$\langle \delta_\gamma, \varphi \rangle = \varphi(\gamma)$$

we have

$$\langle \chi, \varphi \rangle = \langle \chi, \delta_\gamma * \varphi * \delta_{\gamma^{-1}} \rangle$$

$$\text{or} \quad \langle \delta_{\gamma^{-1}} * \chi * \delta_\gamma, \varphi \rangle = \langle \chi, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \quad (2.1)$$

(* means convolution).

For any γ in a neighbourhood of the identity, we have $\gamma = \exp tX$
(X in the Lie algebra $\mathcal{G}$ of G); with X_i a basis of $\mathcal{G}$ we define :

$$\langle \delta'_{X_i}, \varphi \rangle = \frac{d}{dt} \varphi(\exp - tX_i) \Big|_{t=0}$$

The infinitesimal form of (2.1) is equivalent to the set of
 n differential equations :

$$\langle \delta'_{X_i} * \chi - \chi * \delta'_{X_i}, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \quad (A)$$

b) χ is an eigenvector of Laplace operators.

More generally we have an isomorphism between the envelopping
algebra $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ of $\mathcal{G}$ and the algebra (for convolution) of distributions
on G with support identity.

In particular a Casimir operator Q_i of G (center of $\mathcal{U}(\mathcal{G})$) of

degree n_i acts on $\mathfrak{D}(G)$ by mean of

$$\delta_{Q_i}^{(n_i)} \star T$$

$(T \in \mathfrak{D}(G), \delta_{Q_i}^{(n_i)}$ distribution of order n_i with support e).
The differential operators D_{Q_i} associated to the $\delta_{Q_i}^{(n_i)}$ are called the Laplace operators of G . We have for a character

$$\langle \delta_{Q_i}^{(n_i)} \star \chi, \varphi \rangle = q_i \langle \chi, \varphi \rangle \quad (B)$$

$\forall \varphi ; q_i \in \mathbb{C}$ is given by $U(Q_i) = q_i \mathbb{1}$.

c) Translation by the elements of the center of G .

If $g_o \in C(G)$ the operators $U(g_o)$ commute with the representation and thus are multiple of the identity

$$U(g_o) = \alpha \mathbb{1}$$

With $\varphi_{g_o}(g) = \varphi(g_o g)$ we have

$$\langle \chi, \varphi_{g_o} \rangle = \alpha \langle \chi, \varphi \rangle \quad (2.2)$$

Now if the representation U is unitary, the character has additional properties.

d) χ is a distribution of positive type : $\chi \gg 0$.

With $\tilde{\varphi}(g) = \overline{\varphi(g^{-1})}$ we have

$$\langle \chi, \varphi \star \tilde{\varphi} \rangle \geq 0 \quad (2.3)$$

$(U(\varphi \star \tilde{\varphi}))$ is a positive operator)

As a consequence χ has hermitian symetry :

$$\langle \chi, \varphi \rangle = \overline{\langle \chi, \tilde{\varphi} \rangle} \quad (2.4)$$

e) χ is a bounded distribution.

That means that χ is a linear form on the space $\mathcal{D}_1(G)$ of infinitely differentiable functions belonging as also their derivatives (defined by left invariant vector fields) to the space $L^1(G)$ (integrable functions).

It is a consequence of d (see Ref.4 ; the proof, given for $\mathbb{R}^n$, can be carried over to a Lie group). As in fact we have not found a practical way to take the condition $\chi \gg 0$ into account, the condition χ bounded, weaker but easier to handle, will be very usefull.

f) χ is an extremal distribution.

If $\chi = \chi_1 + \chi_2$ with $\chi_1, \chi_2 \gg 0$, then (Ref. 5)

$$\chi_1 = a \chi_2 \quad \chi_2 = (1 - a) \chi_1 \quad 0 < a < 1 \quad (2.5)$$

g) The eigenvalues of Laplace operators (choosen to be symmetric : $Q_i \equiv P(X_i) = \overline{P(-X_i)}$, P is a polynomial) are real.

3. The rules of the game :

We shall in this paper look, in the case of the Poincaré group P and some subgroups, for the distribution solutions of (A) and (B) and obeying (2.2) ; if some solutions are bounded we shall then investigate properties (2.3), (2.4) and (2.5).

Now the only thing we can assert is that, given a solution χ of (A) and (B) obeying (2.2) of positive type and extremal, we know how to build a factorial unitary representation, quasi equivalent to an irredu-

cible unitary representation whose character is χ (G is of type I ; see Ref.6) ; this is Guelfand construction (Ref. 5 or 6).

But we cannot be sure we have found all the characters of G as we do not know when $\mathfrak{D}(G) \subset A_U(G)$ (even if G is semi-simple there are no results when U is not unitary) ; and moreover there can exist characters whose restriction to $\mathfrak{D}(G)$ is 0 ($\chi = 0$ has all good properties).

Conversely given a solution which is not of positive type, it remains an open question to say whether it is a character of a non unitary representation or not. We shall always find a one to one correspondence between the solutions of our problem and the known representations for the groups $SL(2, \mathbb{R})$ and $SL(2, \mathbb{C})$. For the Poincaré group we find objects which are candidates to be the characters of some known non unitary representations, and other we can not associate to any representation we know.

We leave aside at this stage the specific problem of mass zero representations of P , for which we shall work in a space of "distributions" $\mathfrak{D}'_0$ which is a quotient of $\mathfrak{D}'$, and which is only suggested by the specific form of our equations.

4. Method

We have to solve on the manifold G the system of partial differential equations

$$\delta'_{X_i} * T - T * \delta'_{X_i} = 0 \quad (A)$$

$$\delta^{(n_k)}_{Q_k} * T = q_k T \quad (B)$$

this means : given an open covering U_i - each U_i being the domain of a chart - solve (A) and (B) restricted to each U_i which gives (for each set of values q_k) a vector space of solutions $V_i \in \mathfrak{D}'(U_i)$, and then find the distributions $T \in \mathfrak{D}'(G)$ such that $T|_{U_i} \in V_i$.

To solve easily (A), (B) - restricted to some U_i - we are lead to perform definite changes of variables which appear to choose for coordinate surfaces conjugation classes of the group; unfortunately the changes of variables are not everywhere regular in general, and so, we use the following step by step method :

- First we define an open set $U_i^1 \subset U_i$ in which the suitable change of variables can be done; the resolution of (A), (B) in U_i^1 gives a vector space of solutions $V_i^1 \subset \mathcal{D}'(U_i^1)$.

- Next we define U_i^2 ($U_i^1 \subset U_i^2 \subset U_i$) and we search (using in particular limiting processes) what are the solutions in V_i^1 which are the restrictions to U_i^1 of solutions in U_i^2 , and what are the extended solutions.

- In the same way, we define (if necessary)

$$U_i^1 \subset U_i^2 \subset U_i^3 \subset \dots \subset U_i^{k_i} = U_i$$

and successively we extend our solutions from U_i^k to U_i^{k+1} . The choice of the U_i^k is determined only by practical considerations : they correspond to the domains of validity of explicit manipulations.

Note that $0 \in V_i^k$ ($V_i^k \subset \mathcal{D}'(U_i^k)$) is the space of solutions in U_i^k and that the space of solutions in U_i^{k+1} with support in $U_i^{k+1} \setminus U_i^k$ is not necessarily one-dimensionnal ; thus a given element in V_i^k - if it has "extensions" in V_i^{k+1} - may have several of them.

In practice we first solve equations (A) "locally", that is we give in U_i^1 all solutions of (A) and in each U_i^k all solutions of (A) which are zero in U_i^{k-1} . We do not give the global solutions of (A).

Next we apply the differential operators (B) to these local solutions of (A) (the operators (B), restricted to such special distribution have simple expressions) and so solve "locally" the system (A)(B) : we get (low dimensional) vector spaces of solutions. The extension of

solutions from U_i^k to U_i^{k+1} is performed by techniques adapted to each special case.

The complete description of all the open sets U_i^k (or equivalently of the domains of validity of expressions we write) is tedious and generally unuseful. We omit or abbreviate it in different obvious ways.

5. Local resolution of equation A (regular case)

The system $\delta'_{X_i} * T - T * \delta'_{X_i} = 0$ can be written

$${}^t D_i T = 0 \quad (A')$$

where the ${}^t D_i$ are the transposed operators of the homogeneous partial differential operators D_i defined by $D_i \varphi = - \delta'_{X_i} * \varphi + \varphi * \delta'_{X_i}$ ($\varphi \in \mathcal{D}(G)$) that is

$$\langle {}^t D_i T, \varphi \rangle = - \langle T, D_i \varphi \rangle, \quad T \in \mathcal{D}'(G)$$

In each open set U_i (with coordinates z^j , $j = 1 \dots n$) the operators D_i are of the form $D_i = a_i^j(z) \frac{\partial}{\partial z^j}$ where the a_i^j 's are C^∞ functions.

To solve (A') we first perform a change (depending on the coordinate system) of the unknown distribution which leads to homogeneous equations.

We note that a Haar measure on G , is a distribution μ , belonging to Lebesgue class (that is defined by a C^∞ , non vanishing, differential form of maximal order) such that

$${}^t D_i \mu = 0 \quad (5.1)$$

so in each U_i we have

$$\mu = m(z) dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n \quad (5.2)$$

($m(z)$ is a C^∞ non vanishing function) and (5.1) writes

$$\frac{\partial}{\partial z^j} (a_i^j(z) m(z)) = 0 \quad (5.3)$$

Thus if for each distribution T we define

$$\tilde{T}(z) = (m(z))^{-1} T \quad (5.4)$$

(A') becomes

$$a_i^j(z) \frac{\partial}{\partial z^j} \tilde{T}(z) = 0 \quad (5.5)$$

We must notice that these equations, from the Lie algebra commutation relations and the fact that right and left infinitesimal translations commute, form a complete system.

Now, suppose that in some open U the rank $r(z)$ of the $n \times n$ determinant $|a_i^j(z)|$ is equal to a given constant $r^{(*)}$. Then there are $n-r$ C^∞ functions $v^k(z)$ such that $a_i^j(z) \frac{\partial}{\partial z^j} v^k(z) = 0$ and that every function f , solution of $a_i^j(z) \frac{\partial}{\partial z^j} f = 0$ is a function of the v , i.e. $f(z) = f(v(z))$. Suppose furthermore that there exists r C^∞ functions $x^1(z)$ such that the v 's and x 's can be chosen as local coordinates in U_i that is

$$\frac{\partial(v^1 \dots v^{n-r}, x^1 \dots x^r)}{\partial(z^1 \dots z^n)} \neq 0, \infty \text{ in } U_i$$

Définition : We say that a distribution T depends only on the v if there exists $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-r})$ such that

$$\langle \tilde{T}(v, x), \varphi \rangle = \langle S, \int \varphi(v, x) dx \rangle \quad \varphi \in \mathcal{D}(U)$$

(*) At each point $g \in G$ the rank of the system (A) is equal to the dimension of the conjugation class of g .

If T is such a distribution we denote it by $S(v)$

$$T = S(v) = \tilde{T}(v, x) m(v, x)$$

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle S(v), \varphi \rangle = \langle S, \int \varphi(\not{x}, x) m(\not{x}, x) dx \rangle$$

Lemma 5.1 : for given v and a given S , $S(v)$ is independant of the (admissible) choice of the functions x .

Proof : let $y^1(v, x)$ be another possible choice and denote by $S(v)_{\{y\}}$ the distribution defined from S using the y 's

$$\begin{aligned} \langle S(v)_{\{y\}}, \varphi \rangle &= \langle S, \int \varphi(\not{x}, y) m(\not{x}, y) dy \rangle \\ &= \langle S, \int \varphi(\not{x}, y(\not{x}, x)) m(\not{x}, y(\not{x}, x)) \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| dx \rangle \\ &= \langle S, \int \varphi(\not{x}, x) m(\not{x}, x) dx \rangle = \langle S(v), \varphi \rangle \end{aligned}$$

because

$$m(v, x) = m(v, y(v, x)) \left| \frac{\partial(v, y)}{\partial(v, x)} \right| = m(v, y(v, x)) \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right|$$

Lemma 5.2 : the solutions of (A^i) in U_i are all distributions of the form $S(v)$ (if the manifolds $v^k = \text{Cte}$ are connected).

Proof : In the coordinate system v, x , equation (5.5) writes

$$a_i^j(v, x) \frac{\partial}{\partial x^j} \tilde{T}(v, x) = 0 \quad \begin{array}{l} i = 1 \dots n \\ j = 1 \dots r \end{array}$$

with some non vanishing $r \times r$ determinant : $|a_{i_k}^j(v, x)|$ ($k = 1 \dots r$) ; thus (44) is equivalent to

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \tilde{T}(v, x) = 0 \quad \forall j = 1 \dots r$$

Thus $\tilde{T}(v, x) = S \otimes dx^1 \wedge \dots \wedge dx^r$ for some S .

Remark 1 : We have $S(v) = S \otimes \alpha^r$ where α^r is any differential r -form such that $\mu = \alpha^r \wedge dv^1 \wedge \dots \wedge dv^{n-r}$.

Remark 2 : If we use the formal notation $\langle S, \varphi \rangle = \int S(v) \varphi(v) dv$ ($\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-r})$), we have for $\varphi \in \mathcal{D}(U)$

$$\langle S(v), \varphi \rangle = \int S(v) dv \int \varphi(v, x) m(v, x) dx = \int S(v) \varphi(v, x) d\mu(v, x)$$

and so the result of the paragraph is that - under the given regularity conditions - we can use the formal notation

$$\langle T, \varphi \rangle = \int T(z) \varphi(z) d\mu(z)$$

the operator tD_i is then obtained from D_i by a formal integration by parts (and is formally identical to D_i by invariance of the Haar measure) and the solutions - as in the case of functions - are distributions which depends only on characteristic manifolds. In particular, distributions defined by functions are of the form $f(v)\mu$.

Examples : let
$$S_1 = \delta_{a \ i_1}^{(k_{i_1})} \dots \delta_{a \ i_p}^{(k_{i_p})} \quad (p \leq n - r)$$

and

$$S_2 = \delta_{a \ i_1}^{(k_{i_1})} \dots \delta_{a \ i_p}^{(k_{i_p})} S_{i_{p+1} \dots i_{p+q}} \quad (p+q \leq n-r)$$

respectively be the distributions :

$$\varphi \rightarrow \frac{\partial^{k_{i_1}}}{(\partial v^{i_1})^{k_{i_1}}} \dots \frac{\partial^{k_{i_p}}}{(\partial v^{i_p})^{k_{i_p}}} \left(\int \varphi(v) \prod_{l \neq i_1 \dots i_p} dv^l \right) \Big|_{v^j = a^j} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-r})$$

and

$$\varphi \rightarrow \left\langle S, \frac{\partial^{k_{i_1}}}{(\partial v^{i_1})^{k_{i_1}}} \dots \frac{\partial^{k_{i_p}}}{(\partial v^{i_p})^{k_{i_p}}} \left(\int \varphi(v) \prod_{1 \neq i_1 \dots i_{p+q}} dv^1 \right) \right\rangle_{v^j = a^j}^{i_j} \quad (j=1 \dots p)$$

the corresponding distributions in $\mathfrak{D}'(U)$ defined above are noted

$$S_1(v) = \delta^{(k_{i_1})}_{(v^{i_1} - a^{i_1})} \dots \delta^{(k_{i_p})}_{(v^{i_p} - a^{i_p})} \quad (5.6)$$

and

$$S_2(v) = \delta^{(k_{i_1})}_{(v^{i_1} - a^{i_1})} \dots \delta^{(k_{i_p})}_{(v^{i_p} - a^{i_p})} S(v^{i_{p+1}} \dots v^{i_{p+q}})$$

Note that $S_1(v)$ depends - even for $k_{i_j} = 0$ - on the functions v and not only on the manifold $W = \{(v^{i_j} - a^{i_j}) = 0, j = 1 \dots p\}$.

6. Local resolution of (A). Some results in irregular cases

Suppose now that $r(z) = \text{rank } |a_i^j(z)|$ is equal to a constant r_1 in some open set U except on some closed submanifold $W \subset U$ where $r(z) = r_2 < r_1$. Assume again regularity conditions : there are $n - r_1$ characteristic manifolds $v^k(z)$ of $\mathfrak{D}_i$ defined on U and there exists r_1 functions $x^1(z)$ such that $\frac{\partial(v, x)}{\partial(z)} \neq 0, \infty$ in U . Assume also that the manifolds $\{v^k = \text{Cte}\}$ are connected.

The considerations of (I, 5) apply in $U' = U \setminus W$ and so (A) is already solved in U' as long as the manifolds $\{v^1 = \text{Cte}\}$ remain connected in U' . The lowering of the rank of the system on W leads to search for solutions $T \in \mathfrak{D}'(U)$ such that

- either $\text{supp. } T \subset W$

- or, if some manifolds $\{v^k = \text{Cte}\}$ do not remain connected in U' , localized on such manifolds and not "constant" on it.

We shall study two cases which lead to these two possibilities .

These two cases are characterized by the fact that the n -vector fields corresponding to the operators D_i are tangent to W at each point of W .

a) Suppose first that W is a characteristic manifold of the system tD_i , that is, there exist p functions t^1 such that

$$W = \{z ; t^1(v(z)) = 0, \quad 1 \leq l \leq p\}$$

and that there are $n - p - r_1$ functions v' , of the v only, such that (t, v', x) is a coordinate system in a neighbourhood of W (called U again). Equation (5.5) writes

$$a_i^j(t, v', x) \frac{\partial}{\partial x^j} \tilde{T}(t, v', x) \quad 1 \leq i \leq n \quad 1 \leq j \leq r_1$$

and so every distribution of the form (5.6) with support in W (i.e. $\sum_k \delta^{(k)}(t) \hat{T}_k(v')$, finite sum in any bounded open set) is a solution of (A). But they are not related to the lowering of the rank of the system on W . Now the operators tD_i have restrictions to W which in the coordinate system (v', x) on W writes

$${}^tD_i|_W = a_i^j(o, v', x) \frac{\partial}{\partial x^j} \quad (6.1)$$

The system (6.1) is obviously complete, its rank is r_2 and so it admits (with the $n - p - r_1$ functions $v|_W$), $r_1 - r_2$ new C^∞ -characteristic manifolds $u^i(v', x)$, $i = 1 \dots (r_1 - r_2)$.

Let $\hat{u}$ be functions defined in a neighbourhood of W such that $\hat{u}|_W = u$ and such that there exist functions x' so that $(t, v', \hat{u}, x')$ is a coordinate system.

For any $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-p-r_2})$ define

$$T = S(u', \hat{u}) \delta^{(k_1)}(t^1) \dots \delta^{(k_p)}(t^p) \in \mathcal{D}'(U)$$

by

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle S(v', u), \left(\prod_{j=1}^p \frac{\partial^{k_j}}{(\partial t^j)^{k_j}} \right) \int \varphi_m(t, x', \hat{u}, x') dx' \Big|_{t=0} \rangle \quad \varphi \in \mathcal{D}(U) \quad (6.2)$$

(6.2) is obviously independent of the choice of the functions x' and if $k_j = 0, \forall j$, (6.2) is independent of the functions $\hat{u}$ such that $\hat{u}|_W = u$. In this case we write

$$T = S(v', u) \delta(t^1) \dots \delta(t^p)$$

Theorem : i) if W has codimension 1 ($p=1$) and if the derivatives

$$\frac{\partial^{r_1 - r_2}}{(\partial t)^{r_1 - r_2}} \det \| a_{i'}^{j'} \| \Big|_{t=0} \quad 1 \leq i', j' \leq r_1 \quad (6.3)$$

of the determinants of all $r_1 \times r_1$ submatrices of $\| a_i^j \|$ do not simultaneously vanish in W , then every non trivial (i.e. not depending only on the v) solution T of (A) with $\text{supp. } T \subset W$ is of the form $S(v', u) \delta(t)$, i.e. has transversal order 0.

ii) if the quantities (6.3) vanish simultaneously in W there exists non trivial solutions of (A) with support in W , which have transversal order 1.

iii) If $\text{codim. } W = p > 1$ there always exist solutions with non zero transversal order.

Remark : (6.3) is independent of the coordinate system.

(All "tangential" or "mixed" derivatives of order $r_1 - r_2$ are zero and all derivatives of order less than $r_1 - r_2$ are zero).

Proof : α) We have $\text{supp. } \tilde{T}(t, v', \hat{u}, x') \subset W$ so there exist distributions $S_k \in \mathcal{D}'(W)$ such that

$$\widetilde{T}(t, v', \hat{u}, x') = \sum_k \delta^{(k)}(t) S_k \quad (< \widetilde{T}, \varphi > = \sum_k < S_k, \frac{\partial^k}{(\partial t)^k} \varphi_W >)$$

(the sum over k is finite in each bounded open set, for simplicity assume U is bounded. The transversal order of $\widetilde{T}$ in U is N if $S_N \neq 0$ and $k > N \Rightarrow S_k = 0$, N is independant of the coordinate system.

We substitute (6.4) in equation (5.5) ; we get

$$\{b_i^j(t, v', \hat{u}, x') \frac{\partial}{\partial \hat{u}^j} + c_i^1(t, v', \hat{u}, x') \frac{\partial}{\partial x'^1}\} \widetilde{T}(t, v', \hat{u}, x') = 0$$

(with $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq r_1 - r_2$, $1 \leq l \leq r_2$ and $b_i^j(0, v', u, x') = 0$), and-the non zero distribution of the form $S_k \delta^{(k)}(t)$ with different k being linearly independant—we obtain from the coefficients of $\delta^{(N)}(t)$ and $\delta^{(N-1)}(t)$:

$$c_i^1(0, v', u, x') \frac{\partial}{\partial x'^1} S_N = 0 \quad (6.5N)$$

$$c_i^1(0, v', u, x') \frac{\partial}{\partial x'^1} S_{N-1} = N \frac{\partial}{\partial t} b_i^j(t, v', \hat{u}, x') \Big|_{t=0} \frac{\partial S_N}{\partial u^j} \quad (5.5(N-1))$$

(6.5N) is equivalent to $\frac{\partial}{\partial x'^1} S_N = 0$, so its solutions are of the form

$$< S_N, \varphi > = < S_N(\not{x}', \not{u}), \int \varphi(\not{x}', \not{u}, x') dx' >, \quad \varphi \in \mathcal{D}(W)$$

with $N = 0$ (6.5N) is the only condition and so any distribution of the form $S(v', u) \delta(t)$ is solution of (A).

If $N \geq 1$, (6.5(N-1)) must be solved. First we replace it by an equivalent system of r_1 equations. The conditions on the rank of the system (6.5) can be expressed as follows: there exist functions

$g_\alpha^i(t, v', \hat{u}, x')$ $1 \leq i \leq n$, $1 \leq \alpha \leq r_1$ such that

$$\text{if } A_{\alpha}^{\beta}(t, v', \hat{u}, x') = \begin{cases} g_{\alpha}^i(t, v', \hat{u}, x') c_i^{\beta}(t, v', \hat{u}, x') & 1 \leq \beta \leq r_2 \\ g_{\alpha}^i(t, v', \hat{u}, x') b_i^{\beta}(t, v', \hat{u}, x') & r_2+1 \leq \beta \leq r_1 \end{cases}$$

then $\text{Det} \|A_{\alpha}^{\beta}\| \neq 0$ if $t \neq 0$ and $\|A_{\alpha}^{\beta}\|$ is of rank r_2 if $t = 0$. (6.6(N-1)) is equivalent to

$$A_{\alpha}^{\beta}|_{t=0} \frac{\partial S_{N-1}}{\partial x^{\beta}} = N \frac{\partial}{\partial t} A_{\alpha}^{\beta}|_{t=0} \frac{\partial u_j}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial S_N}{\partial u_j} \quad (6.6)$$

(where x is either u or x')

for every suitable set of functions g_{α}^i .

In order to discuss (6.6) we use the following lemma :

Let $\|A_{\alpha}^{\beta}\|$ a matrix of order r_1 and rank r_2 , there exist $r_1 - r_2$ independant null linear combinations of its lines

$$C_{(k)}^{\alpha} A_{\alpha}^{\beta} = 0 \quad 1 \leq k \leq r_1 - r_2$$

and $r_1 - r_2$ null linear combinations of its columns

$$A_{\alpha}^{\beta} D_{\beta}^{(j)} = 0 \quad 1 \leq j \leq r_1 - r_2$$

Define

$$C^{\alpha_1 \dots \alpha_{r_1-r_2}}(r_1-r_2) = [C_{(1)}^{\alpha_1} \dots C_{(r_1-r_2)}^{\alpha_{r_1-r_2}}] = \frac{1}{(r_1-r_2)!} \sum_{\sigma \in S_{r_1-r_2}} \chi(\sigma) C_{(\sigma(1))}^{\alpha_1} \dots C_{(\sigma(r_1-r_2))}^{\alpha_{r_1-r_2}}$$

and

$$D_{\beta_1 \dots \beta_{r_1-r_2}}(r_1-r_2) = [D^{(1)}_{\beta_1} \dots D^{(r_1-r_2)}_{\beta_{r_1-r_2}}]_{\beta_1 \dots \beta_{r_1-r_2}}$$

On the other hand denote by $\hat{A}_{\beta_1 \dots \beta_1}^{\alpha_1 \dots \alpha_1}$ the subdeterminant of order (r_1-1)

obtained by omission of the 1 lines $\alpha_1 \dots \alpha_1$ and of the 1 columns $\beta_1 \dots \beta_1$, then

Lemma

$$\hat{A}_{\beta_1 \dots \beta_1}^{\alpha_1 \dots \alpha_1}(r_1 - r_2) = M C^{\alpha_1 \dots \alpha_1}(r_1 - r_2) D_{\beta_1 \dots \beta_1}(r_1 - r_2)$$

where M is a constant independant of α and β .
The proof is elementary.

Now, going back to equation (6.6) we note that the functions $\frac{\partial u^j}{\partial x^\beta}$ can be taken as the linear combinations $D_\beta^{(j)}(v', x)$ for the determinant $\|A_\alpha^\beta(0, v', x)\|$. If we consider the linear combinations of both sides of (6.6) defined by $C_{(k)}^\alpha(v', x)$, the left hand side of (6.6) vanishes and we just obtained

$$C_{(k)}^\alpha(v', x) \left. \frac{\partial A_\alpha^\beta}{\partial t} \right|_{t=0}(v', x) D_\beta^{(j)}(v', x) \frac{\partial S_N}{\partial u^j} = 0$$

This system has non trivial solutions if and only if the determinant of the matrix

$$\|C_{(k)}^\alpha(v', x) \left. \frac{\partial A_\alpha^\beta}{\partial t} \right|_{t=0}(v', x) D_\beta^{(j)}(v', x)\|$$

(free indices k, j ; $1 \leq k, j \leq r_1 - r_2$) vanishes in W.

But, from the lemma, this determinant write

$$\frac{\partial A_{\alpha_1}^{\beta_1}}{\partial t} \dots \frac{\partial A_{\alpha_{r_1-r_2}}^{\beta_{r_1-r_2}}}{\partial t} \Big|_{t=0} C^{\alpha_1 \dots \alpha_{r_1-r_2}} D_{\beta_1 \dots \beta_{r_1-r_2}} = \frac{\partial}{(\partial t)^{(r_1-r_2)}} (\text{Det } \|A_\alpha^\beta(t, v', x)\|) \Big|_{t=0}$$

which proves i) and ii).

$\beta)$ If $p > 1$ we have $\tilde{T} = \sum_k S_k \delta^{(k_1)}(t^1) \dots \delta^{(k_p)}(t^p)$ $k = \{k_1 \dots k_p\}$

(the transversal order of $\tilde{T}$ is N if there exists $S_k \neq 0$ with $|k| = N$ and $|k| > N$ implies $S_k = 0$; $|k| = k_1 + \dots + k_p$).

In this case equation (6.5(N-1)) is replaced by

$$c_i^1(o, v', u, x') \frac{\partial S_k}{\partial x'^1} = \sum_{s=1}^p (k_s + 1) \frac{\partial}{\partial t^s} b_i^j(t, v', \hat{u}, x') \Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial u^j} S_{\{k_1 \dots (k_s+1) \dots k_p\}} \quad (|k| = N-1)$$

and, even if the compatibility conditions imply

$$\sum_{s=1}^p (k_s + 1) \frac{\partial}{\partial u^j} S_{\{k_1 \dots (k_s+1) \dots k_p\}} = 0$$

this is always possible with non zero $\frac{\partial}{\partial u^j} S_{\{k_1 \dots (k_s+1) \dots k_p\}}$, so there are at least solutions with $N=1$.

b) Suppose now that W is the manifold defined by the equations

$$\begin{cases} t^l(v) = 0 & 1 \leq l \leq p \\ w(v, x) = 0 \end{cases} \quad (t^l \text{ are characteristic manifolds as before})$$

Where W is a C^∞ function such that

$$a_i^j(z) \frac{\partial w}{\partial z^j} \Big|_w = 0$$

Define again coordinates (t, v', w, x) . Then clearly distributions of the form

$$\prod_{l=1}^p \delta(t^l) \varepsilon(w) T(v') \quad (6.7)$$

are solutions of (A), ($\varepsilon(w)$ is the sign of w , it is clear that the form (6.7) is independant of the choice of a function w with the above properties).

We do not discuss in this case the conditions for some non zero transversal order to appear.

More singular cases appear in the practical situation we meet (for example the rank of the system may lowers on a manifold W defined by the intersection of characteristic manifolds which are tangent together, or the manifold W may have a vertex) but in those cases, either we solve (A) by convenient methods or we do not give a complete explicit solution which is not necessary to solve the complete system (A), (B).

As an example, we give here the solutions of (A) with support $\{e\}$, the identity on the group G (rank $|a_i^j(z)| = 0$ on $\{e\}$) : from the isomorphism we mentioned in 2.β , T (supp $T = \{e\}$) is a central distribution, that is $\delta_x * T = T * \delta_x \quad \forall x \in \mathcal{Y}$ if and only if T belongs to the center of $\mathcal{U}(\mathcal{Y})$ and so there exists some Q in the center of $\mathcal{U}(\mathcal{Y})$ such that $T = \delta_Q = \delta_Q * \delta = D_Q^t \delta$ where D_Q is the Laplace operator defined by $D_Q f = \delta_Q * f$ ($f \in \mathfrak{D}$).

II - THE CHARACTERS OF $SL(2, \mathbb{R})$

We choose $SL(2, \mathbb{R})$ for an introduction to our methods of calculation because it is a simple group, with three parameters only and its structure and representations are well known; however the fact it is a real group already obliges us to solve the problem of "class functions" and "eigenfunctions" of Laplace operators in a space of distribution; last, $SL(2, \mathbb{R})$ being a little group of the Poincaré group the calculation gives us some insight into the difficulties to come.

1. Parametrization of $SL(2, \mathbb{R})$

The group $SL(2, \mathbb{R})$ is the group of 2×2 real matrices of determinant 1 :

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \text{with } \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

It has a center $C(G)$: the two matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, and singular elements, the other matrices of trace ± 2 , which cannot be diagonalized.

We introduce the new variables

$$\alpha + \delta = u, v$$

$$\beta + \gamma = r, s$$

In the space $\mathbb{R}^4(u, v, r, s)$ the group manifold is then the quadric

$$u^2 - v^2 - r^2 + s^2 = 4 \quad (1.1)$$

The singular matrices are represented by the submanifolds $u = \pm 2$ which are cones in R^3 . The elements of $C(G)$, corresponding to the values $u = \pm 2$, $v = r = s = 0$ of the parameters, are the vertices of these cones.

The Haar measure can be written

$$\frac{dv \, dr \, ds}{|u|} \quad \text{for } u \neq 0 \qquad \frac{du \, dv \, dr}{|s|} \quad \text{for } s \neq 0$$

We write M^{01} M^{02} M^{12} the generators of the Lie algebra of $SL(2, R)$, with the commutation relations

$$[M^{01}, M^{02}] = M^{12}; [M^{02}, M^{12}] = -M^{01}; [M^{12}, M^{01}] = -M^{02}$$

M^{12} is then the generator of the compact subgroup U_1 . The differential expression of these generators acting on functions of the u, v, r, s variables bounded by (1), by right or left infinitesimal translation in G is :

$$\begin{aligned} 2M_{R,L}^{01} &= \pm u \frac{\partial}{\partial r} \pm r \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial s} + s \frac{\partial}{\partial v} \\ 2M_{R,L}^{02} &= \pm u \frac{\partial}{\partial v} \pm v \frac{\partial}{\partial u} - s \frac{\partial}{\partial r} - r \frac{\partial}{\partial s} \\ 2M_{R,L}^{12} &= \pm u \frac{\partial}{\partial s} \pm s \frac{\partial}{\partial u} + r \frac{\partial}{\partial v} - v \frac{\partial}{\partial r} \end{aligned} \tag{1.2}$$

In fact, we shall always consider the system (2) "restricted" to some open sets where the relation (1) will then just be expressed by the elimination of the "bad" variable.

The Casimir operator of $SL(2, R)$ which is given in the enveloping algebra by

$$Q = (M^{01})^2 + (M^{02})^2 - (M^{12})^2 \tag{1.3}$$

defines in the same way a Laplace operator. As we said we shall only be interested in its restriction ${}^tD_Q^0$ to the central distributions we shall seek first.

2. Central distributions

From (1.2) our equations (A) for central distribution are in $SL(2, R)$:

$$\begin{aligned} \left(v \frac{\partial}{\partial s} + s \frac{\partial}{\partial v} \right) \tilde{T}_c &= 0 \\ \left(s \frac{\partial}{\partial r} + r \frac{\partial}{\partial s} \right) \tilde{T}_c &= 0 \\ \left(r \frac{\partial}{\partial v} - v \frac{\partial}{\partial r} \right) \tilde{T}_c &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

The rank of the system is constant to 2 outside $C(G)$. The characteristic manifolds are

$$u^2 \equiv 4 + v^2 + r^2 - s^2 = a^2$$

they are one-sheeted hyperboloids in R^3 for $a^2 > 4$, two-sheeted hyperboloids for $a^2 < 4$; we saw already that $u^2 = 4$ was a cone.

From our previous discussions we thus see that the solutions of (2.1) are

$$T_c = T_1(u) + \varepsilon(s) \theta(4-u^2) T_2(u) \quad \text{outside } C(G)$$

and (2.2)

$$T_c = \sum_N (a_N \theta(u) + b_N \theta(-u)) \bigotimes_N (\text{finite sum}) \text{ if } \text{supp } T_c \subset C(G)$$

where $\bigotimes_N = (\delta_Q)^{\times N} \rtimes \delta$ (explicitly :

$$\oplus_N = \sum_{p,q \geq 0}^{p+q \leq N} (-)^{p+q} C_N^{p+q} C_{p+q}^p \delta^{(2p)}(v) \delta^{2q}(r) \delta^{(2N-2p-2q)}(s) .$$

($T_1(u)$ and $T_2(u)$ are defined for $u^2 - 4 \neq 0$)

3. Eigendistributions

a) We are now going to look, among distributions T_c , for the solutions of (B) :

$$t_{D_Q} T_c \equiv t_{D_Q}^0 T_c = -q T_c \quad (3.1)$$

We have seen that T_c has a very simple form when $u^2 - 4 \neq 0$. In any such open set the explicite form $t_{D_Q}^0$ also becomes simple; with (1,2) and (1,3), (3,1) becomes

$$[(u^2 - 4) \frac{\partial^2}{\partial u^2} + 3u \frac{\partial}{\partial u} + 4q] \tilde{T}_c = 0 \quad (3.2)$$

b) We shall first solve (3.2) in a open set U complementary of e and such that $u > -2$.

α) The fonctionnal solutions of such a differential equation in u are well known in the analytic field ($\text{Re } u > -2$) :

(3.2) is a Fuchsian equation of first type with a singular-regular point at $u = 2$; it admits one regular holomorphic solution $R(u)$ and one singular solution $S(u) = \frac{A(u)}{(u-2)^{1/2}}$, with $A(u)$ holomorphic.

When the equation is restricted to the half real axis $u > -2$, there is no longer a connexion between the two sides of the point $u = 2$ and we have as four independent solutions of (3.2), the functions

$$\begin{aligned} f_1(u) &= \begin{cases} 0 & u < 2 \\ R(u) & u > 2 \end{cases} & f_3(u) &= \begin{cases} 0 & u < 2 \\ S(u) & u > 2 \end{cases} \\ f_2(u) &= \begin{cases} R(u) & u < 2 \\ 0 & u > 2 \end{cases} & f_4(u) &= \begin{cases} S(u) & u < 2 \\ 0 & u > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Noticing that

$$t_{D_Q}^0 \theta(-s) \theta(4-u^2) T(u) = \theta(-s) t_{D_Q}^0 \theta(4-u^2) T(u)$$

we can conclude that the central distributions solutions of (3.2) in U with a support different from the only manifold $u = 2$ are combinations of

$$\begin{aligned} R_e(u) &= \theta(u-2) R(u) & R_i^+(u) &= \theta(-s) \theta(2-u) R(u) \\ S_e(u) &= \theta(u-2) S(u) & S_i^+(u) &= \theta(-s) \theta(2-u) S(u) \end{aligned}$$

($S(u)$ and of course $R(u)$ are locally summable functions on G and the products θR and θS actually define distributions).

β) To calculate more easily the action of $t_{D_Q}^0$ on these distributions (particularly with the usual formulas of derivation of a product) it is interesting to avoid coincidence of singularities by replacing $\theta(u-2)$ and $\theta(2-u)$ by

$$\lim_{\eta} \theta(-s) \theta(u-2-\eta) \quad \lim_{\eta} \theta(-s) \theta(2-\eta-u)$$

(We know that we can permute limit and derivation). It appears clearly that the quantity η so introduced has the effect of restricting our distributions to a complement of a neighbourhood of identity. The limit $\eta \rightarrow 0$ thus will give us the action of $t_{D_Q}^0$ in all $u > -2$.

Using the form given for $S(u)$ from which we get

$$S(2+\eta) = \frac{A(2)}{\sqrt{\eta}} \quad S'(2+\eta) = \frac{1}{2} \frac{A'(2)}{\sqrt{\eta}} + \frac{1}{2} \frac{A(2)}{\eta\sqrt{\eta}}$$

(at $0(\sqrt{\eta})$ and apart a multiplicative factor of no importance) and the fact that $R(u)$ and $S(u)$ are solution of (3.2) we obtain

$$\begin{aligned}
4^t D_Q^o R_o(u) &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \{ [2\delta(u-2-\eta) + 4\eta\delta'(u-2-\eta)] R(2) + 4\eta\delta'(u-2-\eta) R'(2) \} \\
4^t D_Q^o R_i^+(u) &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \theta\left(\frac{+}{-s}\right) \{ [-2\delta(u-2+\eta) + 4\eta\delta'(u-2+\eta)] R(2) + 4\eta\delta(u-2+\eta) R'(2) \} \\
4^t D_Q^o S_e(u) &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \{ 4\sqrt{\eta}\delta'(u-2-\eta) A(2) + 2\sqrt{\eta}\delta(u-2-\eta) A'(2) \} \\
4^t D_Q^o S_i^+(u) &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \theta\left(\frac{+}{-s}\right) \{ 4\sqrt{\eta}\delta'(u-2+\eta) A(2) + 2\sqrt{\eta}\delta(u-2+\eta) A'(2) \}
\end{aligned}$$

We have calculated in appendix A the limits of the δ and δ' distributions with the result :

$$\begin{aligned}
\lim_{\eta \rightarrow 0} \delta(u-2-\eta) &= \delta(u-2) \\
\lim_{\eta \rightarrow 0} \eta^\alpha \delta'(u-2-\eta) &= 0 \quad \forall \alpha > 0 \\
\lim_{\eta \rightarrow 0} \theta\left(\frac{+}{-s}\right) \delta(u-2+\eta) &= \theta\left(\frac{+}{-s}\right) \delta(u-2) \\
\lim_{\eta \rightarrow 0} \sqrt{\eta} \theta\left(\frac{+}{-s}\right) \delta'(u-2+\eta) &= -2\pi \delta(v) \delta(r) \delta(s)
\end{aligned}$$

and so

$$\begin{aligned}
4^t D_Q^o R_e(u) &= 2\delta(u-2) R(2) \\
4^t D_Q^o R_i^+(u) &= -2\theta\left(\frac{+}{-s}\right) \delta(u-2) R(2) \\
4^t D_Q^o S_e(u) &= 0 \\
4^t D_Q^o S_i^+(u) &= -8\pi A(2) \delta(v) \delta(r) \delta(s)
\end{aligned}$$

γ) On the other hand one sees easily that

$$t_{D_Q}^0 \delta^{(k)}(u-2) = c_1 \delta^{(k+1)}(u-2) + c_2 \delta^{(k)}(u-2) \quad c_1 \neq 0$$

(the distributions $\delta^{(K)}(u-2)$ have a meaning outside $C(G)$), from which we can see that there does not exist any central distribution T of support $u = 2$ such that, separately or combined with the results above, we get $t_{D_Q}^0(T) = 0$.

Last the action of $t_{D_Q}^0$ on $\mathfrak{Q}_N$ giving $\mathfrak{Q}_{N+1}$ and the sum over N being finite we can conclude that the eigendistributions of (3.1) in $u > -2$ are finally

$$R_e(u) + R_i^+(u) + R_i^-(u) = R(u)$$

$$S_e(u) \tag{3.3}$$

$$S_i^+(u) - S_i^-(u) = S_i\left(u, \frac{s}{|s|}\right)$$

c) A similar argument leads us in $u < 2$ to the eigendistributions :

$$\hat{R}(u)$$

$$\hat{S}_e(u) \tag{3.4}$$

$$\hat{S}_i^+(u) - \hat{S}_i^-(u) = \hat{S}_i\left(u, \frac{s}{|s|}\right)$$

($\hat{R}(u)$ and $\hat{S}(u)$ are the regular and singular solutions of (3.2) in U').

We postpone to the next paragraph the patching of the restrictions we have found in $u > -2$ and $u < 2$. This problem will lead us to the discussion of the spectrum of Q .

1. Spectrum of Laplace operator; characters of $SL(2, \mathbb{R})$ a) Explicit expression of R , $\hat{R}$, S , $\hat{S}$.

The differential equation

$$(u^2 - 4)f'' + 3uf' + 4qf = 0$$

can be solved explicitly with a change of variable suited to each region, and next a change of function namely

$$|u| > 2 \quad |u| = 2 \cosh \eta \quad 0 < \eta < +\infty \quad g = \frac{f}{\sinh \eta}$$

$$|u| < 2 \quad u = 2 \cos \Phi \quad 0 < \Phi < \pi \quad g = \frac{f}{\sin \Phi}$$

The equation then becomes

$$g'' + (4q - 1)g = 0$$

and the solutions are

$$R(u) = \begin{cases} \frac{\sinh \sqrt{1-4q} \eta}{\sinh \eta} \\ \frac{\sin \sqrt{1-4q} \Phi}{\sin \Phi} \end{cases} \quad \hat{R}(u) = \begin{cases} \frac{\sinh \sqrt{1-4q} \eta}{\sinh \eta} \\ \frac{\sin \sqrt{1-4q} (\pi - \Phi)}{\sin (\pi - \Phi)} \end{cases}$$

$$S(u) = \begin{cases} \frac{\cosh \sqrt{1-4q} \eta}{\sinh \eta} \\ \frac{\cos \sqrt{1-4q} \Phi}{\sin \Phi} \end{cases} \quad \hat{S}(u) = \begin{cases} \frac{\cosh \sqrt{1-4q} \eta}{\sinh \eta} \\ \frac{\cos \sqrt{1-4q} (\pi - \Phi)}{\sin (\pi - \Phi)} \end{cases}$$

(these functions being defined up to a factor the determination choosen for the root $\sqrt{1-4q}$ has no importance : R and $\hat{R}$ are well continuous on the points $u = \pm 2$).

b) Patching :

We remember that we are only interested in distributions on G satisfying the "parity" requirement

$$\tilde{T}(-u, -s) = \pm \tilde{T}(u, s)$$

On the other hand the distributions of formulas (3.3) and (3.4) we want to patch together, have to be equal in the intersection $J : -2 < u < 2$. We then see that only the homologous lines of (3.3) and (3.4) can fulfil these conditions.

For the first and third lines we have the supplementary condition that $\sqrt{1 - 4q}$ must be a real number, integer or zero. This can be written

$$q = K(1 - K) \qquad K = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} \dots$$

for then

$$\sqrt{1 - 4q} = 2K - 1$$

and we have the two global eigendistributions of $t_{D_Q}^0$:

$$\frac{\sinh(2K-1)\eta}{\sinh \eta} \qquad u > 2$$

$$R^K(u) = \frac{\sin(2K-1)\phi}{\sin \phi} \qquad |u| < 2$$

$$(-1)^{2K} \frac{\sinh(2K-1)\eta}{\sinh \eta} \qquad u < -2$$

$$S_i^K(u, \frac{s}{|s|}) = \theta(4-u^2) \frac{\cos(2K-1)\phi}{\sin \phi} [\theta(s) - \theta(-s)]$$

(the parity of these two solutions is $(-1)^{2K}$).

We can notice here that the variable $\cos \tilde{\Phi} = u/2$ we have introduced is nothing but the cosine of the angle of the rotation corresponding to the element of U_1 group^{of} which $g(v, r, s)$ is conjugated. This leads us to let $\tilde{\Phi}$ vary between 0 and 2π with the relation $\frac{\sin \tilde{\Phi}}{|\sin \tilde{\Phi}|} = \frac{s}{|s|}$. $\tilde{\Phi}$ is then actually the angle of the rotation and we can write more simply

$$S_i^K \left(u, \frac{s}{|s|} \right) = S_i^K (\tilde{\Phi}) = \frac{\cos (2K-1) \tilde{\Phi}}{\sin \tilde{\Phi}} \quad |u| < 2$$

The second lines of (3.3) and (3.4) do not give us much trouble. $S_e(u)$ and $\hat{S}_e(u)$ being both zero in J we have for any q the two global eigendistributions of Q of opposite parity :

$$S_e^{q+}(u) = \theta(-u-2) \frac{\cosh \sqrt{1-4q} \eta}{\sinh \eta} + \theta(u-2) \frac{\cosh \sqrt{1-4q} \eta}{\sinh \eta}$$

$$S_e^{q-}(u) = -\theta(-u-2) \frac{\cosh \sqrt{1-4q} \eta}{\sinh \eta} + \theta(u-2) \frac{\cosh \sqrt{1-4q} \eta}{\sinh \eta}$$

c) The characters of $SL(2, R)$.

We are going now to form with the central eigendistributions we have obtained for each value of q the linear combinations which can be characters, and compare them to the known representations associated with the same q (see Bargmann (ref. 7) for the unitary representations, or Gelfand, Graev and Vilenkin (ref. 8)).

1. $q \neq K(1-K)$

We have only two eigendistributions S_e^{q+} and S_e^{q-} of which we say they are the characters of two nonequivalent irreducible representations. We write

$$\chi_q^{o, 1/2}(u) = \theta(u-2) \frac{\cosh \sqrt{1-4q} \eta}{\sinh \eta} + \theta(-u-2) \frac{\cosh \sqrt{1-4q} \eta}{\sinh \eta}$$

For complex or real negative q the corresponding representations are surely not unitary, the distributions being unbounded. They are well known.

For real $q > 1/4$, χ_q^0 and $\chi_q^{1/2}$ decrease (as $\cos(a \eta) e^{-\eta}$) and can be the characters of unitary representations. There are effectively two known representations : the so-called principal series C^0 and $C^{1/2}$.

For $0 < q < 1/4$, $\chi_q^{1/2}$ still decrease but only as $e^{(-1+\sqrt{1-4q})\eta}$. Only χ_q^0 corresponds to unitary representations : those of the "complementary series" (which do not appear in the regular representation of the group). We are not able to show that $\chi_q^{1/2}$ is not of positive type.

$$2. \quad q = K(1 - K)$$

The space of central eigendistributions is four dimensional, generated by

$$S_e^{K+}, S_e^{K-}, S_i^K, R^K$$

Only one of these distributions has parity $(-1)^{2K+1}$ and we can isolate it as a character

$$\chi_K^{(-)^{2K+1}}(u) = \theta(u-2) \frac{\cosh(2K-1)\eta}{\sinh \eta} + (-1)^{2K+1} \theta(-u-2) \frac{\cosh(2K-1)\eta}{\sinh \eta}$$

For $K > 1$ this distribution, unbounded, is the character of non unitary representations. For $K = 1/2$ it is the character of the unitary representation $C_{1/4}^0$ of the complementary series.

For $K = 1$, the corresponding representation is not unitary, although the character is bounded.

Among the three left distributions, $R(u)$ is continuous and is the character of the finite dimensional representations

$$\chi_K^f(u) = \begin{cases} \frac{\sinh(2K-1)\eta}{\sinh \eta} & u > 2 \\ \frac{\sin(2K-1)\phi}{\sin \phi} & |u| < 2 \\ (-1)^{2K} \frac{\sinh(2K-1)\eta}{\sinh \eta} & u < -2 \end{cases}$$

The dimension of these representations is $2K - 1$ (and χ is well normalized by $\chi_K^f(e) = 2K - 1$). They are of course non unitary except for $K = 1$ which gives the trivial representation. $K = 3/2$ corresponds to the representation of the group by itself : we verify that $\chi_{3/2}^f(u) = u$!

We are left with a two dimensional space of solutions. We can obtain two combinations giving bounded distributions :

$$\frac{1}{2} [(S_e^K(-)^{2K} - R^K) + \alpha_{1,2} S_i^K]$$

We would like to find the values of $\alpha_{1,2}$ so that we have two extremal distributions of positive type, which would be the characters of the unitary representations of the two discrete series D_K^+ and D_K^- .

The condition $\langle \chi, \varphi \rangle = \langle \chi, \widetilde{\varphi} \rangle$ gives us $\alpha_{1,2}$ pure imaginary. The distributions $S_e^K(-)^{2K} - R^K + \alpha S_i^K$ being conjugated the condition $\chi \gg 0$ is of the type $|\alpha| \leq a(K)$ and the extremality gives

$$\chi_K^{\pm}(u, s) = \frac{1}{2} [S_e^K(-)^{2K}(u) - R^K(u) \pm i a(K) S_i^K(u, \frac{s}{|s|})]$$

Up to now we have not been able to calculate $a(K)$ and we can only refer to the result obtained (by very different methods) by Gelfand (Ref. 9) $a(K) = 1 \forall K$.

We then have

$$\chi_K^{\pm} \left(u, \frac{s}{|s|} \right) = \begin{cases} \frac{e^{-(2K-1)\eta}}{\sinh \eta} & u > 2 \\ \pm i \frac{e^{\pm i(2K-1)\phi}}{\sin \phi} & |u| < 2 \\ (-1)^{2K} \frac{e^{-(2K-1)\eta}}{\sinh \eta} & u < -2 \end{cases}$$

d) Frobenius formula.

We conclude this part by noticing a fact which appears as a generalization of the Frobenius formula for finite groups (See ref. 10); this formula relates the character of a representation of a finite group G , induced by a representation of a subgroup H , to the character of this representation : we have

$$\chi_G(g) = \sum_r \chi_H(g_r^{-1} g g_r) \delta_{r g}$$

where the g_r are some representatives of the cosets G/H and where g_r is defined by $g_r^{-1} g g_r \in H$. In particular $\chi_G(g)$ is equal to zero if the element g is not the conjugate of an element of H .

Now all irreducible representations of $SL(2, \mathbb{R})$ are either induced representations or extracted from induced representations; the inducing subgroup is the nilpotent group H of elements $h = \begin{pmatrix} \lambda & x \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ (λ, x real) and the inducing representations the one dimensional irreducible representations of H defined by $(\text{sgn } \lambda)^\varepsilon |\lambda|^{i(s+1)}$, $\varepsilon = 0, 1$ $s \in \mathbb{C}$. If we now write $s = \pm \sqrt{1-4q}$

we have :

- for $q \neq K(1-K)$ ($2K$ positive integer),
the representations induced by $(\varepsilon, \pm s)$ are irreducible and equivalent.
According to ε we get the two representations corresponding to the eigenvalue q of Laplace operator of $SL(2, \mathbb{R})$.

- for $q = K(1-K) \rightarrow s = \pm(2K-1)$ and $\varepsilon = 2K-1$,
the two induced representations are again irreducible and equivalent.
We have found their characters.

- for $s = +(2K-1)$, $\varepsilon = 2K$,
the induced representation is reducible with as subrepresentation the finite dimensional spinor representation. In the quotient space acts the reducible representation $D_K^+ \oplus D_K^-$

- for $s = -(2K-1)$, $\varepsilon = 2K$,
the induced representation is again reducible. But this time the subrepresentation is $D_K^+ \oplus D_K^-$ and the quotient representation is the spinor representation.

Now on the group manifold the subgroup H is defined by $r = s$, $|u| \geq 2$ and the matrices of $SL(2, \mathbb{R})$ for which $|u| < 2$ are surely not the conjugates of elements of H . If we now look at the distributions

$$\chi_q^0, \quad \chi_q^{1/2}, \quad \chi_K^{(-)2K+1}$$

and

$$\chi_K^f + \chi_K^+ + \chi_K^-$$

(trace of the reducible induced representations).

We can see that they have for support

$$|u| \geq 2$$

Such a phenomenon will be still more striking for the characters of the representations of the Poincaré group which are also induced representations when the translations are not trivially represented.

III - CENTRAL DISTRIBUTIONS ON THE POINCARÉ GROUP

The calculation of the central distributions on $SL(2, \mathbb{R})$ has been done very easily because the structure of the set of conjugation classes of the group was simple.

For the Poincaré group the differential method we introduce proves all its interest : one can get of course directly by algebraic calculation or geometrical considerations the invariants under conjugation in $\bar{P}$ and thus know the support of the distributions we are looking for (Joos, SchraderRef. 11 and 12). We obtain in addition the transversal order of these distributions.

As we said in (I.4) we only solve equations (A) "locally".

1. Parametrization of the Poincaré group

a) The Poincaré group P is the semi-direct product of the proper Lorentz group $\mathcal{L}_0$ (connected component of the invariance group of the quadratic form $\underline{x}^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$ on $\mathbb{R}^4$) by the four dimensional translation group $\mathbb{R}^4$. In fact, we shall be interested in covering $\bar{P}$ of P :

$$\bar{P} = \mathbb{R}^4 \times \bar{\mathcal{L}}_0 \quad \text{with} \quad \bar{\mathcal{L}}_0 = SL(2, \mathbb{C})$$

An element of this group can be represented by a pair $(\underline{x}, \Lambda)$, where

- $\underline{x}$ is the hermitian matrix

$$\underline{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}$$

associated with the real four-vector $\tilde{x}^\mu$ ($\det \underline{\tilde{x}} = \underline{x}^2$)

$$- \Lambda \in \text{SL}(2, \mathcal{C}), \text{ i.e. } \Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathcal{C}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

The group law is then

$$(\underline{\tilde{x}}_1, \Lambda_1)(\underline{\tilde{x}}_2, \Lambda_2) = (\underline{\tilde{x}}_1 + \Lambda_1 \underline{\tilde{x}}_2, \Lambda_1^\star \Lambda_2) \quad ; \quad (\Lambda^\star = \text{hermitian conjugate of } \Lambda)$$

b) We define the six matrices $\sigma_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$;
 $\sigma_{\alpha\beta} = -\sigma_{\beta\alpha}$) by

$$\sigma_{0i} = \frac{1}{2} \sigma_i \quad \sigma_{ij} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \sigma_k \quad i, j, k = 1, 2, 3$$

where ε_{ijk} is the completely antisymmetric tensor of order 3
($\varepsilon_{123} = +1$) and the σ_i are the Pauli matrices :

$$\sigma_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

the commutation relations of the $\sigma_{\alpha\beta}$ are those of the generators of the Lie algebra of $\text{SL}(2, \mathcal{C})$:

$$[\sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\gamma\delta}] = -g_{\alpha\gamma} \sigma_{\beta\delta} + g_{\beta\gamma} \sigma_{\alpha\delta} - g_{\beta\delta} \sigma_{\alpha\gamma} + g_{\alpha\delta} \sigma_{\beta\gamma}$$

$$(g_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{if} \quad \alpha \neq \beta, \quad g_{00} = 1, \quad g_{ii} = -1)$$

We then write (sum over repeated indices)

$$\Lambda = \frac{1}{2} [u \mathbb{1} + z^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}] \quad \Lambda \in \text{SL}(2, \mathcal{C}), \quad z^{\alpha\beta} = -z^{\beta\alpha} \in \mathbb{R}$$

(the $z^{\alpha\beta}$ transform under Lorentz group as the components of a tensor of order two).

We get by identification

$$u = u_1 + i u_2 = \operatorname{Re}(\alpha + \delta) + i \operatorname{Im}(\alpha + \delta)$$

$$z^{01} = -\operatorname{Re}(\beta + \gamma) \quad z^{23} = -\operatorname{Im}(\beta + \gamma)$$

$$z^{02} = \operatorname{Im}(\beta - \gamma) \quad z^{31} = -\operatorname{Re}(\beta - \gamma)$$

$$z^{03} = -\operatorname{Re}(\alpha - \delta) \quad z^{12} = -\operatorname{Im}(\alpha - \delta)$$

$\hat{z}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} z^{\gamma\delta}$ is the dual tensor ($\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ is the completely antisymmetric tensor of order 4; $\varepsilon_{0123} = -1$).

With these variables, the group $\bar{\mathcal{L}}_0$ is a manifold in R^8 defined by the equations (which come from $\det \Lambda = 1$)

$$4u_1 u_2 + z^{\alpha\beta} \hat{z}_{\alpha\beta} = 0 \quad (1.1)$$

$$2(u_1^2 - u_2^2 - 4) + z^{\alpha\beta} \hat{z}_{\alpha\beta} = 0$$

The center $C(\bar{\mathcal{L}}_0)$ of $\bar{\mathcal{L}}_0$ has two elements $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ and $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ which are the vertices of cones containing the non diagonalizable matrices with trace ± 2 ($u_1 = \pm 2$, $u_2 = 0$).

The center of the Poincaré group is $C(\bar{P}) = \{(\underline{0}, \pm \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix})\}$. We note that the $z^{\alpha\beta}$ can be chosen as coordinates only in the open sets $U_1(u_1 > 0)$ and $U_2(u_1 < 0)$. (We do not exhibit explicitly a complete system of charts on $\bar{\mathcal{L}}_0$ but it can be done in a straightforward manner).

Coordinates on $\bar{P}$ are given (outside $u_1 = 0$) by $(x^\mu, z^{\alpha\beta})$

2. Equations (A)

$\bar{P}$ is a ten parameters group, so the system (A) contains ten equations, four of them (A.1) expressing invariance under conjugation by R^4 , the other six (A.2) invariance under conjugation by $\bar{\mathcal{L}}_0$; an explicit calculation gives (in the form I(5.5)) :

$$\mathcal{P}_\alpha \tilde{T} \equiv [u_2^2 g_{\alpha\beta} - z_{\alpha\gamma} z_\beta^\gamma - u_1 z_{\alpha\beta} - u_2 \hat{z}_{\alpha\beta}] \frac{\partial}{\partial x_\beta} \tilde{T} = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\mathfrak{M}_{\lambda\mu} \tilde{T} \equiv [z^\beta{}_\lambda \frac{\partial}{\partial z^\beta{}_\mu} - z^{\alpha\mu} \frac{\partial}{\partial z^{\alpha\lambda}} + x_\lambda \frac{\partial}{\partial x^\mu} - x_\mu \frac{\partial}{\partial x^\lambda}] \tilde{T} = 0 \quad (\text{A.2})$$

(where the "bad" variables -for instance u_1 and u_2 outside $\{u_1 = 0\}$ - are to be expressed in terms of the other six by means of (1.1), and $\tilde{T}$ is defined in the corresponding chart as in (I.5)).

The peculiar form of (A.1) in the coefficients of which the variables x^μ do not appear, and (A.2) where the x^α and $z^{\mu\nu}$ variables are separated, leads us to use first a fractionnal approach which furthermore will be of greater interest for geometrical interpretation.

3. Invariance under conjugation by translation

We first study the equations (A.1)

a) Outside $\{u_1=0\}$, we write -with obvious notations- (A.1) in the form

$$\Omega_{\alpha\beta}(z) \frac{\partial}{\partial x_\beta} \tilde{T}(x,z) = 0$$

we have $\det \|\Omega_{\alpha\beta}(z)\| = 4u_2^2$, and so, outside $\{u_2 = 0\}$ solutions are distributions which do not depend on x :

$$T = T(z) \quad (u_2 \neq 0)$$

Then one can see that on the manifold $\{u_2 = 0\}$, the rank r of $\|\Omega_{\alpha\beta}\|$ is 2, except on $R^4 \times C(\overline{\mathcal{I}}_0)$ ($z_{\alpha\beta} = 0$) where $r = 0$. The differential operators of (A.1) restricted to $\{u_2 = 0\}$ are

$$(z_{\alpha\gamma} z_{\beta}^{\gamma} + u_1 z_{\alpha\beta}) \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \quad (3.1)$$

where the variables are now related by

$$\hat{z}^{\alpha\beta} z_{\alpha\beta} = 0 \quad (3.2)$$

$$2(u_1^2 - 4) + z^{\alpha\beta} z_{\alpha\beta} = 0 \quad (3.3)$$

The characteristic manifolds of (3.1) are (outside $R^4 \times C(\overline{\mathcal{I}}_0)$) the four functions $\hat{\xi}^{\sigma} = \hat{z}^{\sigma\tau} x_{\tau}$ among which only two of course are linearly independant ($\det \|\hat{z}^{\sigma\tau}\| \simeq u_1^2 u_2^2$ is of rank two on $\{u_2 = 0\}$ outside $R^4 \times C(\overline{\mathcal{I}}_0)$.)

Now as $\frac{\partial^2}{(\partial u_1)^2} (\det \|\Omega_{\alpha\beta}\|) \neq 0$, we know from the theorem in I that the solutions with support in $\{u_2 = 0\}$ are of the form

$$\delta(u_2) T(z, \hat{\xi}) \quad (\text{outside } R^4 \times C(\overline{\mathcal{I}}_0))$$

Distributions of the form $\prod_{\alpha\beta} \delta(z_{\alpha\beta}) T(x)$ are obviously solutions with support in $R^4 \times C(\overline{\mathcal{I}}_0)$. We do not discuss here the form of solutions with non zero transversal order and with such a support.

b) Geometrically (Ref.11 and 12) the condition $u_2 = 0$ means that the matrix Λ of the corresponding element in $\bar{P}$ is either a rotation ($|u_1| < 2$) or a pure Lorentz transformation ($|u_1| > 2$) or a transformation of the Euclidean group $E(2)$ ($|u_1| = 2$). Indeed the matrix $\Omega_{\alpha\beta}$ is proportionnal to the matrix $(1 - \tilde{\Lambda}^t)_{\alpha\beta}$ where $\tilde{\Lambda}^t$ is the transposed of the 4×4 matrix $\tilde{\Lambda} \in \mathcal{I}_0$ defined by $\Lambda \in \overline{\mathcal{I}}_0$.

If $u_2 = 0$, there exists a two-plane, pointwise invariant by $\tilde{\Lambda}$

generated by the vectors $\hat{z}^{\mu\nu} y_\nu$ ($y \in \mathbb{R}^4$) and of equation $z^{\alpha\beta} x_\beta = 0$. This two-plane is space-like, has a time-like direction or is tangent to the light cone respectively according to $|u_1| < 2$, $|u_1| > 2$ or $|u_1| = 2$.

4. Invariance under conjugation by Lorentz group

We solve now equations (A.2) separately :

$$[\mathfrak{M}_{\lambda\mu}^{\rho\sigma}(z) \frac{\partial}{\partial z^{\rho\sigma}} + \mathfrak{M}_{\lambda\mu}^{\nu}(x) \frac{\partial}{\partial x^\nu}] \tilde{T}(x, z) = 0 \quad (\text{A.2})$$

a) We first look at the system restricted to distributions which depend only on z : it reduces then to the system of class-equations of $SL(2\mathcal{C})$:

$$\mathfrak{M}_{\lambda\mu}^{\rho\sigma}(z) \frac{\partial}{\partial z^{\rho\sigma}} \tilde{T}(z) = 0 \quad (\text{A2.1})$$

The rank of the system (A2.1) is 4 outside $C(\overline{\mathcal{I}}_0)$; one can see that there exists two non trivial combinations of the equations :

$$z^{\lambda\mu} \mathfrak{M}_{\lambda\mu}^{\rho\sigma} = 0 \quad \hat{z}^{\lambda\mu} \mathfrak{M}_{\lambda\mu}^{\rho\sigma} = 0$$

which are independant unless $z_{\lambda\mu} = 0$, $\forall \lambda, \mu$. (We give in appendix B a list of relations between z , $\hat{z}$, ... which are useful in all calculations).

The two corresponding characteristic manifolds are

$$z^{\alpha\beta} z_{\alpha\beta} \quad \text{and} \quad z^{\alpha\beta} \hat{z}_{\alpha\beta}$$

i.e. $u_1^2 - u_2^2$ and $u_1 u_2$; the patching between the different open sets of a covering of $SL(2\mathcal{C})$ shows that in fact u_1 and u_2 are themselves characteristic manifolds. So the solutions of (A2.1) on $\overline{\mathcal{I}}_0$ are distributions of the form $T(u_1, u_2)$ outside $C(\overline{\mathcal{I}}_0)$.

On the other hand solutions of (A2.1) with support in $C(\overline{\mathcal{I}}_0)$ are of the form (see end Part I)

$$T_{\{a\},\{b\}} = N_1 N_2 \sum_{\geq 0} [a_{N_1 N_2} \theta(u_1) + b_{N_1 N_2} \theta(-u_1)] A^{N_1} B^{N_2} \left(\prod_{\alpha < \beta} \delta(z^{\alpha\beta}) \right)$$

(finite sum) where A and B are the Laplace operators of $SL(2\mathcal{C})$. The solutions of (A2) which depend only on z are thus of the form $T(u_1 u_2)$ (outside $R^4 \times C(\overline{\mathcal{I}}_0)$) and $T_{\{a\},\{b\}}$.

b) Acting on distributions depending only on $\underline{x}$ (A.2) reduces to the invariance equations of the Minkowsky space under $SL(2\mathcal{C})$.

$$\mathfrak{M}_{\lambda\mu}^{\nu}(\underline{x}) \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \tilde{T}(\underline{x}) = 0 \quad (A2.2)$$

Outside $\{x^{\mu} = 0\}$ there are only 3 independant equations with the characteristic manifold $\underline{x}^2 = x_{\mu} x^{\mu}$. So the solutions of (A.2) which depends only on x are, outside $\{x_{\mu} = 0\}$ of the form

$$\underline{T(\underline{x}^2)}, \quad \underline{\theta(\underline{x}^2) \mathcal{E}(x^0) T(\underline{x}^2)} \quad \text{and} \quad \underline{\delta^{(k)}(\underline{x}^2) \mathcal{E}(x^0)}$$

(The formal notation $\theta(\underline{x}^2) \mathcal{E}(x^0) T(\underline{x}^2)$, does not mean that the product makes sense : it means "any odd, invariant distribution with support in the light cone". The use of such formal notation does not spoil the validity of the subsequent calculations if one handles it carefully. Analogous remarks are to be understood when we use similar notations in the following).

On $\{x^{\mu} = 0\}$ the rank of (A2.2) is zero and the solutions with support in $\{x^{\mu} = 0\}$ are

$$\prod_{\lambda}^N \delta(x^{\lambda}) = N! \sum_{\substack{\sum n_{\lambda} = N \\ n_{\lambda} \geq 0}} \frac{(-1)^{n_0}}{\prod_{\lambda} (n_{\lambda}!)} \prod_{\lambda} \delta^{(2n_{\lambda})}(x^{\lambda}), \quad \forall N$$

c) Last we look at the complete system.(A.2).

From $z^{\lambda\mu} \mathfrak{M}_{\lambda\mu}^{\sigma\sigma} = 0$ and $\hat{z}^{\lambda\mu} \mathfrak{M}_{\lambda\mu}^{\sigma\sigma} = 0$ we have

$$z^{\lambda\mu} \mathfrak{M}_{\lambda\mu} = \xi^\sigma \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \quad (4.1)$$

and

$$\hat{z}^{\lambda\mu} \mathfrak{M}_{\lambda\mu} = \hat{\xi}^\sigma \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \quad (4.2)$$

(with $\xi^\mu = z^{\mu\nu} x_\nu$, $\hat{\xi}^\mu = \hat{z}^{\mu\nu} x_\nu$)

Now, in a neighbourhood of any point which does not belong to $R^4 \times C(\mathcal{L}_0)$, (A.2) can be replaced by an equivalent system of six equations which contains (4.1), (4.2) and four linear combinations of $\mathfrak{M}_{\lambda\mu}$, (the system of these four last equations being of rank 4) . So the rank of (A.2) is six (outside $R^4 \times C(\overline{\mathcal{L}}_0)$) except if

- $\xi^\mu = 0$ or $\hat{\xi}^\mu = 0$ or ξ^μ proportional to $\hat{\xi}^\mu$; then
 $r = 5$

- $\xi^\mu = \hat{\xi}^\mu = 0$ then $r = 4$

The system containing ten derivatives admits (when $r = 6$) four characteristic manifolds : we have already found three of them : $u_1, u_2, \underline{x}^2$ the fourth can be taken as

$$Q = \hat{\xi}^2 = \hat{\xi}^\mu \hat{\xi}_\mu = (u_1^2 - 2) \underline{x}^2 - 2(\underline{x}, \tilde{\Lambda}, \underline{x})$$

We do not discuss further the system (A.2) and we now go back to the study of the complete system (A).

5. Central distributions.

The system (A) is equivalent to

$$(A) \left\{ \begin{array}{l} \{ C_{(i)}^{\lambda\mu}(z) \mathfrak{M}_{\lambda\mu}^{\rho\sigma}(z) \frac{\partial}{\partial z^{\rho\sigma}} + C_{(i)}^{\lambda\mu}(z) \mathfrak{M}_{\lambda\mu}(x) \frac{\partial}{\partial x^v} \} \tilde{T}(z, x) = 0 \\ \hat{\xi}^v \frac{\partial}{\partial x^v} \tilde{T}(z, x) = 0 \\ \xi^v \frac{\partial}{\partial x^v} \tilde{T}(z, x) = 0 \\ \Omega^{\mu\nu}(z) \frac{\partial}{\partial x^v} \tilde{T}(z, x) = 0 \end{array} \right.$$

where the $C_{(i)}^{\lambda\mu}$, ($i = 1, 2, 3, 4$) define four linear combinations of the six $\mathfrak{M}_{\lambda\mu}^{\rho\sigma}$ such that the rank of $\| C_{(i)}^{\lambda\mu}(z) \mathfrak{M}_{\lambda\mu}^{\rho\sigma}(z) \|$ is 4 outside $R^4 \times C(\bar{\mathcal{L}}_0)$. Now only four among the six last equations can be independent; so it is obvious that the rank r of the system (A) is at most 8, in fact

$$(1) \quad \boxed{r = 8} \quad \text{if } \underline{u_2 \neq 0}, \text{ the corresponding solutions are}$$

$$\underline{T = T(u_1, u_2)} \quad (5.1)$$

We have seen that on $\{u_2 = 0\}$ the rank of $\|\Omega^{\mu\nu}\|$ is two outside $R^4 \times C(\bar{\mathcal{L}}_0)$; on the other hand the equation $\xi^v \frac{\partial}{\partial x^v}$ is a linear combination of $\Omega^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^v}$:

$$4\xi^v = (u_1 x_\mu - \xi_\mu) \Omega^{\mu\nu} \quad \text{if } u_2 = 0$$

(the coefficients $(u_1 x_\mu - \xi_\mu)$ of the linear combination vanish simultaneously if and only if $x_\mu = 0 \quad \forall \mu$ but this implies $\xi_\mu = 0$) and so they remain seven equations which are independent unless

$$\hat{\xi}^{\mu} = 0 \quad (5.2)$$

Or

$$\hat{\xi}^{\nu} = C_{\mu}^{\nu}(z, x) \Omega^{\mu\nu}(z) \neq 0 \quad (5.3)$$

If we introduce $\hat{\eta}_{\mu} = \hat{z}_{\mu\nu} \hat{\xi}^{\nu}$, one can see that

$$(5.2) \text{ is equivalent to } \hat{\xi}^0 = 0, \quad \hat{\eta}^0 = 0 \quad (5.2')$$

$$(5.3) \text{ is equivalent to } (u_1^2 - 4) = 0, \quad \hat{\eta}^0 = 0 \quad (5.3')$$

and so

$$(2) \quad \boxed{r = 7} \quad \text{if } u_2 = 0 \text{ outside } \{\hat{\xi}^0 = 0, \hat{\eta}^0 = 0\} \cup \\ \underline{((u_1^2 - 4) = 0, \hat{\eta}^0 = 0)} \text{ with the solutions}$$

$$\delta(u_2) T(u_1, Q) \quad (5.4)$$

$$\delta(u_2) \theta(4 - u_1^2) \theta(Q) \mathcal{E}(\hat{\xi}^0) T(u_1, Q) \quad (5.5)$$

$$\delta(u_2) \theta(4 - u_1^2) \theta(-Q) \mathcal{E}(\hat{\eta}^0) T(u_1, Q) \quad (5.6)$$

$$\delta(u_2) \theta(4 - u_1^2) \delta^{(k)}(Q) T(u_1, \mathcal{E}(\hat{\xi}^0), \mathcal{E}(\hat{\eta}^0)) \quad (5.7)$$

$$\delta(u_2) \delta^{(k)}(4 - u_1^2) \mathcal{E}(\hat{\eta}^0) T(Q, \mathcal{E}(u_1)) \quad (5.8)$$

$$(3.a) \quad \boxed{r = 6} \quad \text{if } u_2 = 0, \quad \hat{\xi}^0 = 0, \quad \hat{\eta}^0 = 0 \text{ outside} \\ \underline{(\mathbb{R}^4 \times C(\bar{\mathcal{I}}_0))}$$

One can see that any solution with support in $\{u_2 = 0, \hat{\xi}^0 = 0, \hat{\eta}^0 = 0\}$ is of the form

$$\sum_{p,q} \delta(u_2) \delta^{(p)} \left(\frac{\hat{\xi}^0}{\sqrt{\hat{z}^{0\alpha} \hat{z}^0_{\alpha}}} \right) \delta^{(q)} \left(\frac{\hat{\eta}^0}{\sqrt{\hat{z}^{0\alpha} \hat{z}^0_{\alpha}}} \right) T_{p,q}(u_1) \quad (5.9)$$

but any distribution of that form is not a solution : we shall not need the precise description of solutions and so we do not discuss it; however we note that

$$(\underline{P}^2)^m (\underline{W}^2)^n \delta(u_2) \delta\left(\frac{\hat{\xi}^0}{\sqrt{\hat{z}^0 \alpha \hat{z}^0 \alpha}}\right) \delta\left(\frac{\hat{\eta}^0}{\sqrt{\hat{z}^0 \alpha \hat{z}^0 \alpha}}\right) T(u_1) \quad (5.10)$$

are solutions. (($\underline{P}^2$) and ($\underline{W}^2$) are Laplace operators).

$$(3.b) \quad \boxed{r = 6} \quad \underline{\text{if } u_2 = 0, u_1^2 = 4, \hat{\eta}^0 = 0 \text{ outside } (R^4 \times C(\bar{\mathcal{I}}_0))}$$

That manifold is the intersection of the characteristic manifolds $u_2 = 0$, $u_1^2 = 4$, $Q = 0$, but $\{u_1^2 = 4\}$ and $\{Q = 0\}$ are tangent together and the regularity conditions assumed in the study of (I.5) are not fulfilled.

The system (A) restricted to that manifold has a new characteristic manifold

$$\lambda = \frac{\hat{\xi}^0}{\sqrt{\hat{z}^0 \alpha \hat{z}^0 \alpha}} \quad (5.11)$$

(We note that $\frac{\hat{\xi}^\mu \hat{\xi}^\nu}{\hat{z}^\mu \alpha \hat{z}^\nu \alpha}$ is independant of μ and ν).

The solutions of (A) with the given support are of the form

$$\sum_n \sum_{2p+q=2n} \delta(u_2) \delta^{(p)}(u_1^2 - 4) \delta^{(q)} \left(\frac{\hat{\eta}^0}{\sqrt{\hat{z}^0 \alpha \hat{z}^0 \alpha}} \right) T_{p,q}(\lambda) \quad (5.12)$$

and

$$\delta(u_2) \delta(u_1^2 - 4) \delta^{(q)} \left(\frac{\hat{\eta}^0}{\sqrt{\hat{z}^0 \alpha \hat{z}^0 \alpha}} \right) \frac{1}{\lambda^q} \quad (5.13)$$

(Any distribution of the form (5.12) is not a solution but

$$(\underline{W}^2)^n \delta(u_2) \delta(u_1^2 - 4) \delta\left(\frac{\hat{\eta}^0}{\sqrt{\hat{z}^0 \hat{\alpha} \hat{z}^0 \hat{\alpha}}}\right) T(\lambda) \quad (5.14)$$

are solutions).

$$(4) \quad \boxed{r = 3} \quad \text{on } \underline{R^4 \times C(\bar{\mathcal{L}}_0) \text{ outside } C(\bar{P})}$$

The corresponding solutions are

$$(\underline{W}^2)^n \prod_{\mu < \nu} \delta(\hat{z}^{\mu\nu}) T(\underline{x}^2, \mathcal{E}(u_1)) \quad (5.15)$$

$$(\underline{W}^2)^n \prod_{\mu < \nu} \delta(\hat{z}^{\mu\nu}) \theta(\underline{x}^2) \mathcal{E}(x^0) T(\underline{x}^2, \mathcal{E}(u_1)) \quad (5.16)$$

$$(\underline{W}^2)^n \prod_{\mu < \nu} \delta(\hat{z}^{\mu\nu}) \delta^{(k)}(\underline{x}^2) [a + b \mathcal{E}(u_1)] \mathcal{E}(x^0) \quad (5.17)$$

$$(A)^p (B)^q \prod_{\mu < \nu} \delta(\hat{z}^{\mu\nu}) (a + b \mathcal{E}(u_1)) \quad (5.18)$$

where A and B are the Laplace operators of $SL(2\mathcal{C})$

$$(5) \quad \boxed{r = 0} \quad \text{on } C(\bar{P})$$

with solutions

$$(\underline{P}^2)^m (\underline{W}^2)^n \prod_{\mu < \nu} \delta(\hat{z}^{\mu\nu}) \prod_{\lambda} \delta(x^\lambda) (a + b \mathcal{E}(u_1)) \quad (5.19)$$

We give briefly the geometrical interpretation of all "signs" which appear in these formulas. The vector $\hat{\xi}^\mu$ ($u_2 = 0$) lies in the invariant two-plane we talked about when discussing the conjugation under R^4 ; when $|u_1| < 2$ (two-plane with time like directions) the sign of the component of $\hat{\xi}^\mu$ along a time direction (if $Q > 0$) or a space direction ($Q < 0$) is Lorentz invariant. So is $\hat{\xi} = 0$. A situation of

similar type occurs when $|u_1| = 2$ (two-plane tangent to the light cone): the sign of the space component of $\hat{\xi}^\mu$ is invariant for $Q < 0$, the sign of the "light" component for $Q = 0$. It just remains to notice that the vector $\hat{\eta}^\mu$ also lies in the invariant two plane, in which it is orthogonal to $\hat{\xi}^\mu$ so that its time component up to a factor is just the space component of $\hat{\xi}$.

*

*

*

As a conclusion to this study we emphasize on the fact that we have found central distributions with non zero transversal order; this means that the linear forms they define also depend on the values of the derivatives of the test-functions transversal to the corresponding class of conjugation i.e in some sense on the neighbourhood of this class. A class of conjugation, considered from its algebraic definition, can be looked at as an isolated set, a central distribution on a given class cannot.

IV - CALCULATION OF THE CHARACTERS

We now calculate those among the central distributions of $\bar{P}$ which are eigendistributions of the Laplace operators of the group. As we already said the program fails on the point $m^2 = 0$, $w^2 = 0$ where we have to change our space of solutions and solve again equations (A) and (B).

As in the previous part, we do not explicit the calculation of limits coming from the singularities of the supports of central distributions.

The Laplace operators associated to $\underline{P}^2 = P_\mu P^\mu$ and $\underline{W}^2 = W^\mu W_\mu$ with $W^\mu = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} M_{\nu\rho} P_\sigma$ are obtained from the differential expressions

$$P_L^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \quad (0.1)$$

$$2M_L^{\mu\nu} \equiv u_1 \frac{\partial}{\partial z_{\mu\nu}} + u_2 \frac{\partial}{\partial \hat{z}_{\mu\nu}} + \hat{z}^{\alpha\mu} \frac{\partial}{\partial \hat{z}^\alpha_\nu} - \hat{z}^{\alpha\nu} \frac{\partial}{\partial \hat{z}^\alpha_\mu} + 2x^\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} - 2x^\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

Central eigendistributions of $\underline{P}^2 (m^2 \neq 0)$.

a) $\underline{P}^2$ does not act on the $\hat{z}_{\rho\sigma}$ variables and so we can look separately at its action on distributions with support in $u_1^2 - 4 \geq 0$.

Without giving the detail of the open sets we shall use for our step by step calculation, we however, for the sake of geometrical interpretation, draw for a given Lorentz transformation $\{\hat{z}_{\mu\nu}\}$ with $u_2 = 0$, the intersection of the quadric Q with the two-plane the transformation leaves invariant in M ; we get the figures :

$Q = 0 \Leftrightarrow \hat{\xi}^\mu = 0 \quad \forall \mu$

$Q < 0$

$u_{1-4}^2 > 0$

Fig. 1

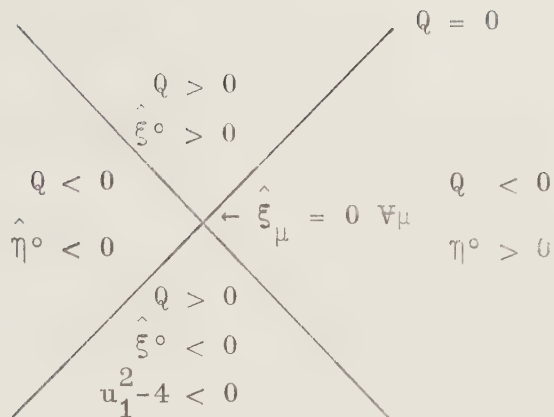


Fig. 2

$Q < 0 \quad \hat{\eta} > 0$

λ

$u_{1-4}^2 = 0$

$Q = \hat{\eta}^\circ = 0$

each λ defines a conjugation class

Fig. 3

which are easily understood from the algebraic identity :

$$Q = \hat{\xi}^2 = \frac{\hat{\eta}_\mu \hat{\eta}_\nu + (u_{1-4}^2) \hat{\xi}_\mu \hat{\xi}_\nu}{z_{\mu\alpha} z_{\nu\alpha}} \quad \forall \mu, \nu ; u_2 = 0 \tag{1. 1}$$

b) We first look at the central eigendistributions of $\underline{p}^2$ outside $Q = 0, u_{1-4}^2 = 0$. For distributions T of the form (III.5. 1) (we shall omit the mention III in the following), $\underline{p}^2 T = 0$ and we have no contribution (we have supposed $m^2 \neq 0$). For distributions of the form (5. 4) to (5. 6) we are led to solve :

$$\delta(u_2) [4(u_{1-4}^2) Q \frac{\partial^2 T}{\partial Q^2} + 4(u_{1-4}^2) \frac{\partial T}{\partial Q} + m^2 T] = 0 \tag{1. 2}$$

The solutions of (1. 2) are easily found to be :

$$\delta(u_2) \left[J_0 \left(\sqrt{\frac{m^2 Q}{u_1^2 - 4}} \right) F(u_1) + N_0 \left(\sqrt{\frac{m^2 Q}{u_1^2 - 4}} \right) G(u_1) \right] \quad (1.3)$$

where J_0 and N_0 are the regular and singular Bessel functions of order 0 (we choose the determination of the square root with argument in $[0, \pi]$, F and G are arbitrary distributions depending only on u_1).

c) If we now include $Q = 0$ but stay outside $\hat{\xi}^\circ = \hat{\eta}^\circ = 0$, we have to look at the action of $\underline{P}^2$ on (5.7) and to take into account the derivatives of θ functions in (5.5) and (5.6).

We see easily that $\underline{P}^2$ acting on (5.7) with $\delta^{(k)}(Q)$ gives a distribution of the same type with $\delta^{(k+1)}(Q)$ so it cannot contribute to an eigendistribution (k is only allowed a finite number of values).

Being careful with the derivatives of $\theta(Q)$ (i. e. using limiting processes and writing $Q = 0$ with help of (1.1)), we get for (5.5) and (5.6) the following eigendistributions of $\underline{P}^2 - m^2$:

$$\begin{aligned} \delta(u_2) \theta(4-u_1^2) J_0 \left(\sqrt{\frac{m^2 Q}{4-u_1^2}} \right) \theta(Q) \theta(\pm \hat{\xi}^\circ) F_\pm^+(u_1) \\ \delta(u_2) \theta(4-u_1^2) J_0 \left(\sqrt{\frac{m^2 Q}{u_1^2-4}} \right) \theta(-Q) \theta(\pm \hat{\eta}^\circ) F_\pm^-(u_1) \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\delta(u_2) \theta(4-u_1^2) N_0 \left(\sqrt{\frac{m^2 Q}{u_1^2-4}} \right) G(u_1) .$$

(see Fig. 4)

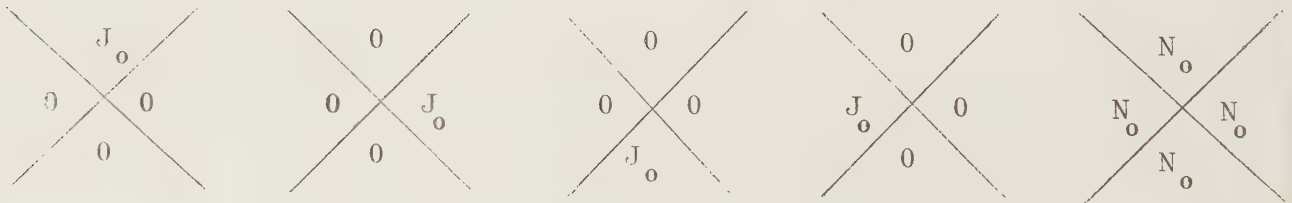


Fig. 4

d) Adding $\hat{\xi}^0 = \hat{\eta}^0 = 0$ but outside $\{\hat{z}^{\mu\nu} = 0\}$ we have to look at the action of $\underline{P}^2$ on (5.9) : we see easily again that the transversal order is highered; and we have to see what happens to (1.3) and (1.4) on $\hat{\xi}^0 = \hat{\eta}^0 = 0$

Moreover we shall also now take into account the values of m^2 , noticing that if we want our Bessel functions to define distributions they must not have an exponential behaviour near $u_1^2 - 4 = 0$ (we shall see further that the distributions depending on u_1 we shall use are not 0 on $u_1^2 - 4 = 0$)

With the notations $I_o(x) = J_o(ix)$, $K_o(x) = i\frac{\pi}{2}[J_o(ix) + i N_o(ix)]$ we have the solutions

for $m^2 > 0$

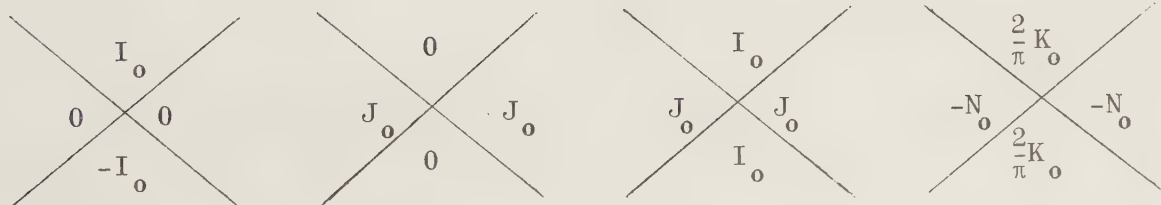
$$\delta(u_2) \theta(4 - u_1^2) I_o\left(\sqrt{\frac{m^2 Q}{4 - u_1^2}}\right) \theta(Q) \mathcal{E}(\hat{\xi}^0) F_1(u_1) \quad (1.5)$$

$$\delta(u_2) \theta(4 - u_1^2) J_o\left(\sqrt{\frac{m^2 Q}{u_1^2 - 4}}\right) \theta(-Q) \mathcal{E}(\hat{\eta}^0) F_2(u_1) \quad (1.6)$$

$$\delta(u_2) \theta(4 - u_1^2) \left[I_o\left(\sqrt{\frac{m^2 Q}{4 - u_1^2}}\right) \theta(Q) + J_o\left(\sqrt{\frac{m^2 Q}{u_1^2 - 4}}\right) \theta(-Q) \right] F_3(u_1) \quad (1.7)$$

$$\delta(u_2) \theta(4 - u_1^2) \left[\frac{2}{\pi} K_o\left(\sqrt{\frac{m^2 Q}{4 - u_1^2}}\right) \theta(Q) - N_o\left(\sqrt{\frac{m^2 Q}{u_1^2 - 4}}\right) \theta(-Q) \right] F_4(u_1) \quad (1.8)$$

(see fig. 5)



- For $m^2 < 0$

$$\delta(u_2) \theta(u_1^2 - 4) J_0\left(\sqrt{\frac{m^2 Q}{u_1^2 - 4}}\right) G(u_1) \quad (1.9)$$

$$\delta(u_2) \theta(4 - u_1^2) J_0\left(\sqrt{\frac{m^2 Q}{u_1^2 - 4}}\right) \theta(Q) \mathcal{E}(\hat{\xi}^0) G_1(u_1) \quad (1.10)$$

$$\delta(u_2) \theta(4 - u_1^2) \left[N_0\left(\sqrt{\frac{m^2 Q}{u_1^2 - 4}}\right) \theta(Q) - \frac{2}{\pi} K_0\left(\sqrt{\frac{m^2 Q}{4 - u_1^2}}\right) \theta(-Q) \right] G_2(u_1) \quad (1.11)$$

(see fig. 6)



(all Bessel functions have real arguments)

- For any other complex value of m^2 (1.10) and (1.11) are the only solutions.

e) If we let $u_1^2 - 4$ be 0 with $\{\hat{z}_{\mu\nu} \neq 0\}$ we have to look at the action of $\underline{P}^2$ on (5.8) : from (1.2) we see that this time the transversal order is lowered so we cannot have eigendistributions of this type; we should also look at the action of $\underline{P}^2$ on (5.12) and (5.13) but we can see that the action of $\underline{W}^2$ highers their transversal order so they are of no interest for our problem.

Let us mention that

$$\begin{aligned} \underline{P}^2 \left[\delta(u_2) \delta(u_1^2 - 4) \delta\left(\frac{\hat{\eta}^0}{\sqrt{-\hat{z}^0 \hat{\alpha} \hat{z}^0 \alpha}}\right) T(\lambda) \right] &= \\ &= -\delta(u_2) \delta(u_1^2 - 4) \delta\left(\frac{\hat{\eta}^0}{\sqrt{-\hat{z}^0 \hat{\alpha} \hat{z}^0 \alpha}}\right) \frac{\partial^2 T}{\partial \lambda^2} \end{aligned}$$

so that

$$\delta(u_2) \delta(u_1^2 - 4) \delta \frac{\hat{\eta}^0}{\sqrt{-\hat{z}^0 \alpha_{\hat{z}^0 \alpha}}} [ae^{im\lambda} + be^{-im\lambda}] \quad (1.12)$$

(a b any constants) is an eigendistribution of $\underline{P}^2$.

f) We do not look at the action of $\underline{P}^2$ on (5.15) to (5.19) because such distributions cannot be eigendistributions of $\underline{W}^2$.

2. Simultaneous central eigendistributions of $\underline{P}^2$ and $\underline{W}^2$.

a) We shall now look for those among the eigendistributions of $\underline{P}^2$ which are also eigendistributions of $\underline{W}^2$. Last paragraph showed us that outside $u_1^2 - 4 = 0$ the solutions of $\underline{P}^2 - m^2 = 0$ depended only on the variables u_1, u_2 (by $\delta(u_2)$) and $Z = \frac{Q}{u_1^2 - 4}$.

Now in the same way we used the fact that $\underline{P}^2$ did not act on the $\hat{z}_{\mu\nu}$ variables, we shall now use that $\underline{W}^2$ does not act on u_2 and Z . More precisely a calculation, valid in some open set U where $u_1^2 - 4 \neq 0$, $Q \neq 0$, and for distributions $\delta(u_2)T$ such that $\delta(u_2)(\underline{P}^2 - m^2)T = 0$, gives :

$$4 \underline{W}^2[\delta(u_2) T(u_1, Z)] = m^2 \delta(u_2) [(u_1^2 - 4) \frac{\partial^2 T}{\partial u_1^2} + Su_1 \frac{\partial T}{\partial u_1} + \frac{3u_1^2 - 4}{u_1^2 - 4} T] \quad (2.1)$$

i.e. $\underline{W}^2$ acting on such distributions is reduced to a second order differential operator in u_1 .

We are thus led to replace in formulas (1.5) to (1.11) the products $\theta(\frac{+}{-} Q) \theta(\frac{+}{-}(u_1^2 - 4))$ by the equivalent and suitably fitted

products $\theta(\frac{+}{-} Z) \theta(\frac{+}{-}(u_1^2 - 4))$.

The solution of the eigenvalue problem in the whole group will be the cumbersome part of this paragraph.

b) In U equation (2.1) allows us to determine the distributions $F(u_1)$ and $G(u_1)$ of formulas (1.5) to (1.11). Indeed the eigen-equation $\underline{W}^2 - w^2 = 0$ then leads to :

$$(u_1^2 - 4) \frac{T''}{u_1^2} + 3u_1 \frac{T'}{u_1} + \frac{3u_1^2 - 4}{u_1^2 - 4} T = \frac{4w^2}{m^2} T \quad (2.2)$$

This is a Fuchsian equation of first type with two singular-regular points at $u_1 = \pm 2$. For each right of left neighbourhood of these two points it has two solutions we shall again, by analogy with $SL(2, R)$, call regular and singular, and which have the behaviour

$$R(u_1) = \frac{A(u_1)}{\sqrt{u_1^2 - 4}} \quad S(u_1) = \frac{B(u_1)}{u_1^2 - 4} \quad (2.3)$$

with $A(u_1)$ and $B(u_1)$ holomorphic functions.

c) We now have to see if the distributions (1.5) to (1.11) where the F and G are replaced by $R(u_1)$ and $S(u_1)$ are eigendistributions on the whole $\bar{P}$; we use for this calculation the method of extension given in I (practically we replace for the derivations $\theta(\frac{+}{-}(u_1^2 - 4))$ by $\theta(\frac{+}{-}(u_1^2 - 4) - \mathcal{E})$ and then take the limit $\mathcal{E} \rightarrow 0$). The details of these tedious calculations are given in appendix C. The results are (in the open sets $u_1 > -2$ or $u_1 < 2$).

$$\underline{1.} \quad \text{with } F, G = R(u_1) = \frac{A(u_1)}{\sqrt{u_1^2 - 4}}$$

$$-m^2 > 0 :$$

$$\begin{aligned} (\underline{W}^2 - w^2) \quad (1.5) &= \frac{i}{m} A\left(\frac{+}{-}2\right) \delta(u_2) \delta(u_1^2 - 4) \delta\left(\frac{\hat{\eta}^0}{\sqrt{-\hat{z}^0 \alpha \hat{z}^0 \alpha}}\right) \\ &\times \operatorname{sh} m \lambda \mathcal{E}(\hat{\xi}^0) \end{aligned}$$

$$(\underline{W}^2 - w^2) \quad (1.6) = 0 \quad (2.4)$$

$$(\underline{W}^2 - w^2) \quad (1.7) = \frac{i}{m} A\left(\frac{+}{-}2\right) \delta(u_2) \delta(u_1^2 - 4) \delta\left(\frac{\hat{\eta}^0}{\sqrt{-\hat{z}^0 \alpha \hat{z}^0 \alpha}}\right) \operatorname{ch} m \lambda$$

$$(\underline{W}^2 - w^2) \quad (1.8) = 0$$

$$-m^2 < 0 :$$

$$(\underline{W}^2 - w^2) \quad (1.9) = \frac{1}{m} A\left(\frac{+}{-}2\right) \delta(u_2) \delta(u_1^2 - 4) \delta\left(\frac{\hat{\eta}^0}{\sqrt{-\hat{z}^0 \alpha \hat{z}^0 \alpha}}\right) \cos m \lambda$$

$$\begin{aligned} (\underline{W}^2 - w^2) \quad (1.10) &= \frac{i}{m} A\left(\frac{+}{-}2\right) \delta(u_2) \delta(u_1^2 - 4) \delta\left(\frac{\hat{\eta}^0}{\sqrt{-\hat{z}^0 \alpha \hat{z}^0 \alpha}}\right) \\ &\times \sin m \lambda \mathcal{E}(\hat{\xi}^0) \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$(\underline{W}^2 - w^2) \quad (1.11) = -\frac{i}{m} A\left(\frac{+}{-}2\right) \delta(u_2) \delta(u_1^2 - 4) \delta\left(\frac{\hat{\eta}^0}{\sqrt{-\hat{z}^0 \alpha \hat{z}^0 \alpha}}\right) \cos m \lambda$$

$$\underline{2.} \quad \text{with } F, G = S(u_1) = \frac{B(u_1)}{u_1^2 - 4}$$

$$-m^2 > 0 :$$

$$(\underline{W}^2 - w^2) \quad (1.5) = 0$$

$$(\underline{W}^2 - w^2) \quad (1.6) = \prod_{\alpha < \beta} \delta(\hat{z}_{\alpha\beta}) \Delta_m^1(\underline{x}^2) \quad (2.6)$$

$$(\underline{W}^2 - \underline{w}^2) \quad (1.7) \quad = \prod_{\alpha < \beta} \delta(\hat{z}_{\alpha\beta}) \Delta_m^2(\underline{x}^2)$$

$$(\underline{W}^2 - \underline{w}^2) \quad (1.8) \quad = \prod_{\alpha < \beta} \delta(\hat{z}_{\alpha\beta}) \Delta_m^3(\underline{x}^2)$$

$$- m^2 < 0 :$$

$$(\underline{W}^2 - \underline{w}^2) \quad (1.9) \quad = 0$$

$$(\underline{W}^2 - \underline{w}^2) \quad (1.10) \quad = 0 \quad (2.7)$$

$$(\underline{W}^2 - \underline{w}^2) \quad (1.11) \quad = \prod_{\alpha < \beta} \delta(\hat{z}_{\alpha\beta}) \Delta_{im}^4(\underline{x}^2)$$

We were not able to calculate the distributions $\Delta^i(\underline{x}^2)$ (which satisfy $(\underline{P}^2 + m^2) \Delta^i = 0$) and so cannot assert they are different from 0 and, for the three Δ_m , linearly independant.

d) On the other hand we can calculate that $\underline{W}^2$ acting on any central distribution with support $\{\hat{\eta}_1^0 = 0, u_1^2 - 4 = 0\}$ or $\{\hat{z}^{\mu\nu} = 0 \quad \forall \mu, \nu\}$ highers its transversal order. The only simultaneous eigendistributions of $\underline{P}^2$ and $\underline{W}^2$ are thus those lines or combinations of lines in (2.4), (2.5), (2.6), (2.7) which lead to a right hand side 0 i.e.

$$\text{with} \quad R(u_1) \quad (1.6) , (1.8) , (1.9) \text{ -i (1.11)} \quad (2.8)$$

$$\text{with} \quad S(u_1) \quad (1.5) , (1.9) , (1.10)$$

3. Spectrum of $\underline{W}^2$. Characters of the representations $m^2 \neq 0$

a) Explicit expression of R and S :

The differential equation (2.2) can be solved explicitly with a change of variables suited to the sets $|u_1| \gtrless 2$ and a change of function. Namely :

$$\begin{aligned} |u_1| > 2, < -2 \quad u_1 &= \pm 2 \operatorname{ch} \frac{\eta}{2} \quad \eta > 0 \quad g(\eta) = \frac{f}{\operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2}} \\ |u_1| < 2 \quad u_1 &= 2 \cos \frac{\varphi}{2} \quad 0 < \varphi < 2\pi \quad g(\varphi) = \frac{f}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} \end{aligned}$$

The equation then becomes

$$g'' + \left(\frac{1}{4} - \frac{w^2}{m^2} \right) g = 0 \quad (3.1)$$

and we see the solutions of (2.2) are :

$$\begin{aligned} |u_1| > 2 \quad R(u_1) &= \frac{\operatorname{sh} \sigma \eta}{\operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2}} \quad S(u_1) = \frac{\operatorname{ch} \sigma \eta}{\operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2}} \\ |u_1| < 2 \quad R(u_1) &= \frac{\sin \sigma \varphi}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} \quad S(u_1) = \frac{\cos \sigma \varphi}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} \end{aligned}$$

with $\sigma = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{w^2}{m^2}}$ (there is of course no fixed choice of normalization for R and S across their singularities)

b) Spectrum of $\underline{W}^2$:

Exactly as for $SL(2, \mathbb{R})$ the existence of a center with two elements in $\bar{P}$ enforces the "parity" condition :

$$\langle \chi, \varphi_- \rangle = \mp \langle \chi, \varphi \rangle \quad (\varphi_- (\underline{x}, \hat{z}) = \varphi (\underline{x}, -\hat{z}))$$

Through the transformation $\hat{z}^{\mu\nu} \rightarrow -\hat{z}^{\mu\nu}$, Q and $\hat{\eta}^0$ are invariant, $\hat{\xi}^0$ and u_1 take opposite signs. We see that the solutions (2.8) do not mix with one another and so that we must have

$$R, S(u_1) = \mp R, S(-u_1)$$

This condition enforces 2σ to be an integer for those solutions which are not 0 for $u_1^2 < 4$. With $2\sigma = 2j + 1$, $j = 0, 1/2, 1, \dots$, or $2\sigma = 2K - 1$, $K = 1/2, 1, \dots$ (we shall choose the definition with j for $m^2 > 0$ and with K for $m^2 < 0$ so to get at the end the notations of the literature for the representations of $\bar{P}$) we thus have :

$$w^2 = -m^2 j(j+1) \quad \text{or} \quad w^2 = m^2 K(1-K)$$

For the solution (1.9) with $S(u_1)$ it only links the disconnected parts with supports $u_1 > 2$, < -2 which thus must appear with coefficients of the same absolute value.

c) The characters of $\bar{P}$ ($m^2 \neq 0$) :

We shall now form, with the central eigendistributions we have found for each value of m^2 and w^2 , the linear combinations which can be characters of irreducible representations, i.e. which possess definite parity properties and eventually, for real values of m^2 and w^2 , which are of positive type and extremal.

As in Part 1 however we shall just be able to select bounded, hermitian and extremal distributions and say they are candidate to be of positive type. Only comparison with the known unitary irreducible representations of $\bar{P}$ and with the results of Schrader (Ref.12), will allow us to fix our last unknown coefficient.

We refer to $\bar{P}$ for the notations used relative to $SL(2, R)$.

$$\underline{1.} \quad m^2 > 0 :$$

We have three solutions : (1.6) and (1.8) with R, (1.5) with S. Necessarily

$$w^2 = -m^2 j(j+1)$$

The solution (1.5), unbounded and odd in $\underline{x}$, can at most be the character of non unitary representation

$$\chi_{m,j}^- = \delta(u_2) I_0\left(\sqrt{\frac{m^2 Q}{4-u_1^2}}\right) \theta(Q) \mathcal{E}(\hat{\xi}^0) \theta(4-u_1^2) \frac{\cos(2j+1)\frac{\Phi}{2}}{\sin^2 \frac{\Phi}{2}}$$

With the other two solutions we can form two hermitian (i.e. satisfying $\chi(g) = \chi(g^{-1})$); here $g \rightarrow g^{-1}$ entails $Q, u_1, \hat{\xi}^0 \rightarrow Q, u_1, \hat{\xi}^0, \hat{\eta}^0 \rightarrow -\hat{\eta}^0$) extremal distributions which are bounded :

$$(1.8)^\pm i a(m, j) (1.6)$$

They can be the characters of the unitary "physical" representations $[m, j, \frac{\pm}{-}]$ of $\bar{P}$, induced by the rotation group. Indeed comparison with Ref.12 gives us $a(m, j) = 1$ and we have :

$$\begin{aligned} \chi_{m,j}^{\frac{\pm}{-}} = & \delta(u_2) \left[\frac{2}{\pi} K_0\left(\sqrt{\frac{m^2 Q}{4-u_1^2}}\right) \theta(Q) + i H_0^1\left(\sqrt{\frac{m^2 Q}{u_1^2-4}}\right) \theta(\pm \hat{\eta}^0) \theta(-Q) \right. \\ & \left. - i H_0^2\left(\sqrt{\frac{m^2 Q}{u_1^2-4}}\right) \theta(-Q) \theta(\mp \hat{\eta}^0) \right] \theta(4-u_1^2) \frac{\sin(2j+1)\frac{\Phi}{2}}{\sin^2 \frac{\Phi}{2}} \end{aligned}$$

All these three characters have parity $(-1)^{2j}$.

$$\underline{2}. \quad m^2 < 0$$

$$\alpha) \quad w^2 \neq m^2 K(1 - K) :$$

We have only two solutions built with (1.9) and S :

$$\chi_{im,\sigma}^+ = \delta(u_2) J_0\left(\sqrt{\frac{m^2 Q}{u_1^2 - 4}}\right) \left[\theta(u_1 - 2) \frac{\text{ch} \frac{\eta}{2}}{\text{sh}^2 \frac{\eta}{2}} + \theta(-u_1 - 2) \frac{\text{ch} \sigma \eta}{\text{sh}^2 \frac{\eta}{2}} \right]$$

If w^2 is not real or with $\frac{w^2}{m^2} < -\frac{3}{4}$, $\chi_{im,\sigma}^+$ can be a character of a non unitary representation of $\bar{P}$ "induced" by a non unitary representation of $SL(2, R)$ (for $\frac{w^2}{m^2} < -\frac{3}{4}$ χ is not bounded).

If $\frac{w^2}{m^2} > \frac{1}{4}$ we find the characters of the representations $[im, \sigma, +]$ of $\bar{P}$ induced by the principal series of $SL(2, R)$.

For $0 < \frac{w^2}{m^2} < \frac{1}{4}$ we have the characters of the representations induced by the complementary series of $SL(2, R)$, $\chi_{im,\sigma}^+$ corresponding to an unitary representation.

For $-\frac{3}{4} \leq \frac{w^2}{m^2} < 0$, $\chi_{im,\sigma}^+$, though bounded, can only be a character of a non unitary representation.

$$\beta) \quad w^2 = m^2 K(1 - K) :$$

We have a four dimensional space of solutions : the two solutions of $\alpha)$, (1.10) with S, and (1.9) - i(1.11) with R. These last two solutions have parity $(-1)^{2k}$ so we can isolate the solution of $\alpha)$ with parity $(-1)^{2k+1}$

$$\chi_{im,K}^+ = \delta(u_2) J_0\left(\sqrt{\frac{m^2 Q}{u_1^2 - 4}}\right) \left[\theta(u_1 - 2) \frac{\text{ch}(2K-1)\frac{\eta}{2}}{\text{sh}^2 \frac{\eta}{2}} + (-1)^{2K+1} \frac{\text{ch}(2K-1)\frac{\eta}{2}}{\text{sh}^2 \frac{\eta}{2}} \right]$$

For $K > 1$ it is unbounded and probably corresponds to the character of non unitary representation of $\bar{P}$ "induced" by the non unitary representation of $SL(2, R)$ we have found at this point. For $K = 1/2$ it is the character of the unitary representation of $\bar{P}$ induced by the unitary representation $C_{1/4}^0$ of the complementary sery.

The solution (1.9) -i (1.11) with R corresponds to the representations of $\bar{P}$ "induced" by the finite dimensional representations of $SL(2, R)$. It is unitary only for $K = 1$

$$\begin{aligned} x_{im, K}^f &= \delta(u_2) \left[\theta(u_1^2 - 4) J_0 \left(\sqrt{\frac{m^2 Q}{u_1^2 - 4}} \right) \left[\theta(u_1) \frac{\text{sh}(2K-1) \frac{\eta}{2}}{\text{sh}^2 \frac{\eta}{2}} + (-1)^{2K} \theta(-u_1) \frac{\text{sh}(2K-1) \frac{\eta}{2}}{\text{sh}^2 \frac{\eta}{2}} \right] \right. \\ &\quad \left. - \theta(4 - u_1^2) \left[N_0 \left(\sqrt{\frac{m^2 Q}{u_1^2 - 4}} \right) \theta(Q) - \frac{2}{\pi} K_0 \left(\sqrt{\frac{m^2 Q}{4 - u_1^2}} \right) \theta(-Q) \right] \frac{\sin(2K-1) \frac{\phi}{2}}{\sin^2 \frac{\phi}{2}} \right] \end{aligned}$$

Last we can form two bounded combinations which are the characters of the unitary representations $[im, K, \pm]$ of $\bar{P}$ induced by the two discrete series of $SL(2, R)$:

$$\begin{aligned} x_{im, K}^{\pm} &= \delta(u_2) \left[\theta(u_1^2 - 4) J_0 \left(\sqrt{\frac{m^2 Q}{u_1^2 - 4}} \right) \left[\theta(u_1) \frac{e^{-(2K-1) \frac{\eta}{2}}}{\text{sh}^2 \frac{\eta}{2}} + (-1)^{2K} \theta(-u_1) \frac{e^{-(2K-1) \frac{\eta}{2}}}{\text{sh}^2 \frac{\eta}{2}} \right] \right. \\ &\quad \left. \pm i \theta(4 - u_1^2) \left[N_0 \left(\sqrt{\frac{m^2 Q}{u_1^2 - 4}} \right) \theta(Q) - \frac{2}{\pi} K_0 \left(\sqrt{\frac{m^2 Q}{4 - u_1^2}} \right) \theta(-Q) \right] \frac{e^{\pm i(2K-1) \frac{\phi}{2}}}{\sin^2 \frac{\phi}{2}} \right] \end{aligned}$$

(we obtained in fact a coefficient $a(im, K)$ before $\theta(4 - u_1^2)$, we set to 1 with help of Ref.12)

3. m^2 complex :

We have only one solution : (1.10) with S and still the spectral condition for w^2

$$w^2 = -m^2 j(j+1)$$

It might be a character of non unitary representation :

$$\chi_{m,j} = \delta(u_2) J_0\left(\sqrt{\frac{m^2 Q}{u_1^2 - 4}}\right) \vartheta(Q) \varepsilon(\hat{\xi}^0) \vartheta(4 - u_1^2) \frac{\cos(2j+1)\frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

d) Frobenius formula :

It is worth here again to note how nicely appears the fact that the representations of $\bar{P}$ are induced : Frobenius formula tells us, for finite groups, that the character of an induced representation is a multiple of the character of the inducing one.

Here our inducing representations are those of the little groups $R^4 \times SU_2$ or $R^4 \times SL(2, \mathbb{R})$ and the corresponding characters are of the form :

$$\chi_w \cdot e^{i \underline{p} \cdot \underline{x}}$$

where χ_w is a character of SU_2 or $SL(2, \mathbb{R})$, $\underline{x} \in R^4$, $\underline{p}^2 = m^2$.

Now, leaving aside $\chi_{im,k}^+$, the characters of $\bar{P}$ we have found have the structure :

$$\chi_{w, m^2} = \delta(u_2) \frac{\chi_w}{\sin \frac{\varphi}{2}, \operatorname{sh} \frac{\eta}{2}} \times B\left(\sqrt{\frac{m^2 Q}{u_1^2 - 4}}\right)$$

(B is any Bessel function), i. e. :

- they have for support the elements of $\bar{P}$ which are conjugated of elements of the inducing group which belong to the support of the character of the inducing representation ;
- they contain the character χ_w time a "multiplicity" factor $\frac{1}{\sin \frac{\varphi}{2}}$ or $\frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\eta}{2}}$.
- they contain also, in a certain sense, $e^{i \underline{p} \cdot \underline{x}}$ with a multiplicity : Bessel functions being integrals of $e^{i \underline{p} \cdot \underline{x}}$

The fact the structure of $\chi_{im,k}^+$ is not so nice is due to the fact that for $u_1 < 2$ the trace of a matrix of $SL(2, \mathbb{R})$ does not specify its conjugation class as it does in $SL(2, \mathbb{C})$.

4. Characters of the representations $m^2 = 0$ $w^2 \neq 0$

a) Central eigendistributions of $\underline{P}^2$

There is no major change here. Calculation runs similarly to 1 with, instead of the two Bessel functions J_0 and N_0 , a constant and $\text{Log } |Q|$. We must only notice that the solutions of $\underline{P}^2 = 0$ are now defined up to the addition of distributions of the form $T(u_1, u_2)$.

Leaving those aside we get for eigendistributions :

- in $u_1^2 - 4 > 0$: zero
- in $u_1^2 - 4 < 0$:

$$\begin{aligned} \delta(u_2)\theta(Q) \varepsilon(\hat{\xi}^0) T(u_1) \\ \delta(u_2)\theta(-Q) \varepsilon(\hat{\eta}^0) T(u_1) \\ \delta(u_2)\text{Log}|Q| T(u_1) \end{aligned} \quad (4.1)$$

with T an arbitrary distribution.

- on $u_1^2 - 4 = 0$ (outside $\{z^{\mu\nu} = 0\}$) we have in addition :

$$\delta(u_2)\delta(u_1^2 - 4)T(Q, \varepsilon(\hat{\eta}^0), \varepsilon(u_1)) \quad (4.2)$$

b) Simultaneous eigendistributions of $\underline{P}^2$ and $\underline{W}^2$:

The part played in 2. by the variable Z is now played by Q itself. Indeed we see that $\underline{W}^2$ acting on distribution (4.1) (and also of course on distributions of type $T(u_1, u_2)$) gives 0, so these will not interest us for the moment, and acting on distribution (4.2) leads to the eigenequation :

$$2 Q^3 \frac{\partial^4 T}{\partial Q^4} + 11 Q^2 \frac{\partial^3 T}{\partial Q^3} + 11 Q \frac{\partial^2 T}{\partial Q^2} + \frac{\partial T}{\partial Q} - \frac{w^2}{8} T = 0 \quad (4.3)$$

With $x = \frac{4}{\sqrt{-4w^2Q}}$ (we choose the determination of argument in $[0, \frac{\pi}{2}]$) we find that four independant solutions of (4.3), outside $Q = 0$ are

$$B_o(x) \quad B'_o(ix) \quad (4.4)$$

where $B_o, B'_o = J_o$ or N_o .

Calculation shows that the only global solutions are those whose behaviour as $Q \rightarrow 0$ is :

$$a \quad a\varepsilon(\hat{\eta}^0) \quad \sqrt{-Q} \varepsilon(\hat{\eta}^0) \quad \text{Log}|Q|$$

i.e. the four independant solutions (see fig. 7) :

$$J_o(x) \quad J_o(ix) \quad (4.5,1)$$

$$J_o(x) \quad J_o(ix) \quad \varepsilon(\hat{\eta}_o) \quad (4.5,2)$$

$$[J_o(x)N_o(ix) - N_o(x)J_o(ix)] \varepsilon(\hat{\eta}_o) \quad (4.5,3)$$

$$J_o(x)N_o(ix) + N_o(x)J_o(ix) \quad (4.5,4)$$

$J_o J_o \quad J_o J_o \quad J_o J_o \quad -J_o J_o \quad J_o N_o \quad -N_o J_o \quad -J_o N_o \quad +N_o J_o \quad J_o N_o \quad +N_o J_o \quad J_o N_o \quad +N_o J_o$
 $\hat{\eta}^0 = 0 \quad \hat{\eta}^0 = 0 \quad \hat{\eta}^0 = 0 \quad \hat{\eta}^0 = 0$

Fig. 7

These solutions give rise to eight simultaneous eigendistributions of $\underline{P}^2$ and $\underline{W}^2$. Indeed the parity requirement enforces the form :

$$\delta(u_2) \quad (4,5,i) \quad [\delta(u_1 - 2) \pm \delta(u_1 + 2)]$$

c) Characters of the representations :

We shall now extract, from the two sets of distributions which have definite parity, the linear combinations which are characters of unitary representations of $\bar{P}$. Once more we can only guess that the left solutions are characters of non unitary representations.

So we restrict now on the real values of w^2 , and search for bounded combinations of (4.5). If $w^2 > 0$ then $x > 0$ and clearly the only bounded products of the form (4.4) are $B_o(x) H_o^1(ix)$. Now these cannot be obtained from (4.5) so we can conclude there is no unitary representations with $w^2 > 0$.

Similarly one sees easily that for $w^2 < 0$ the only bounded products of the form (4.4) are

$$H_o^1(x) J_o(ix) \quad H_o^1(x) N_o(ix) \quad J_o(x) H_o^1(ix)$$

we thus find four global bounded solutions

$$\begin{aligned} & \delta(u_2) [\delta(u_1 - 2) \pm \delta(u_1 + 2)] \{ 2i J_o(x) J_o(ix) - [J_o(x) N_o(ix) + N_o(x) J_o(ix)] \} \\ & \delta(u_2) [\delta(u_1 - 2) \pm \delta(u_1 + 2)] [J_o(x) N_o(ix) - N_o(x) J_o(ix)] \varepsilon(\hat{\eta}^0) \end{aligned}$$

Moreover the first line being real and the second pure imaginary, they both possess hermitian symmetry (through $g \rightarrow g^{-1}; \varepsilon(\hat{\eta}^0) \rightarrow -\varepsilon(\hat{\eta}^0)$).

The condition of extremality then give us the form

$$\begin{aligned} \chi_{o,w}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = & \delta(u_2) [\delta(u_1 - 2) + \varepsilon_1 \delta(u_1 + 2)] \{ 2i J_o(x) J_o(ix) - [J_o(x) N_o(ix) + \\ & + N_o(x) J_o(ix)] + \varepsilon_2 \alpha [J_o(x) N_o(ix) - N_o(x) J_o(ix)] \varepsilon(\hat{\eta}^0) \} \end{aligned}$$

The coefficient α , which is real, should be determined by the fact that χ is of positive type and extremal and then $\chi_{o,w}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ would be the

characters of the mass 0, continuous spin, representations of $\bar{P}$; $\varepsilon_1 = \pm 1$ tells us whether the representation is faithful or not for the center of $SL(2, \mathbb{C})$; ε_2 is the "sign of the energy".

d) Frobenius formula :

Except that $\chi_{o,w}$ has for support $u_2 = 0$ $u_1 = \pm 2$ nothing expresses the fact that the corresponding representation is induced. But this is not a surprise : the inducing representation is a representation of $\mathbb{R}^4 \times E(2)$ which "kills" the rotations of the Euclidian group : the inducing character is $\delta(\varphi) J_o(w|z|) e^{i \underline{p} \cdot \underline{x}}$ (for an element $\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & z \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}$ of E_2 , $\underline{x} \in \mathbb{R}^4$, $\underline{p}^2 = 0$). But elements with $\varphi = 0$ and different z are in the same class of conjugation of $SL(2, \mathbb{C})$, so the multiplicative multiplicity factor of Frobenius formula is here partly replaced by an integral over z , which gives rise to the second Bessel function of the character (by mean of the integral representation : $H_o^\alpha(x) H_o^\beta(ix) \alpha \int_{\gamma^\alpha} e^{x^2/2z} H_o^\beta(z) \frac{dz}{z}$, where γ^α is a suitable path, $\alpha, \beta = 1, 2$).

5. Characters of helicity representations, $m^2 = w^2 = 0$

a) Generalities :

First part of last paragraph showed us that the space of central solutions of

$$\underline{p}^2 T = 0 \quad (5.1)$$

$$\underline{w}^2 T = 0 \quad (5.2)$$

in which we must pick up the characters of helicity representations, was infinite dimensional. This infinity has two origins : first the arbitrary distribution in formula (4.1), second the arbitrary additive term of the form $T(u_1, u_2)$.

But we know that for unitary irreducible representations with $m^2 = w^2 = 0$ the operators $U(W_\mu)$ and $U(P_\mu)$ are proportionnal :

$$U(W_\mu) = i \lambda U(P_\mu) \quad \forall \mu$$

So the character of the representations must satisfy the supplementary equation :

$$(W_\mu - i \lambda P_\mu) \chi = 0 \quad (5.3)$$

(W_μ and P_μ being now the differential operators).

This condition, as we shall see, removes the first ambiguity.

In order to remove the second ambiguity, that is to obtain well defined solutions, we must solve equations (5.1), (5.2), (5.3) in an other space than $\mathfrak{D}'(\bar{P})$, namely in $\mathfrak{D}'_0(\bar{P})$ the dual space of

$$\mathfrak{D}_0(\bar{P}) = \{ \varphi \in \mathfrak{D}(\bar{P}), \int_{\mathbb{R}^4} \varphi(\underline{x}, \Lambda) d\underline{x} = 0, \quad \forall \Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_0 \}$$

equipped with the induced topology.

(distributions which do not depend on $\underline{x}$ vanish on $\mathfrak{D}_0$).

The fact that the characters of the "zero mass, finite helicity" unitary representations cannot be distributions can be shown directly : if U is a strongly continuous unitary representation such that for each $\varphi \in \mathfrak{D}$ the operator $U(\varphi)$ has a trace, and thus is compact, then for each $f \in L^1(G)$, $U(f)$ is compact (because $\mathfrak{D}$ is dense in L^1 and the representation of L^1 is norm continuous). It is known (Ref. 3) that the "zero mass, finite helicity" representations do not have this property. By different methods, R. Schrader (Ref. 12) had already pointed out that the characters of these representations could only be defined on $\mathfrak{D}_0$.

b) The space $\mathfrak{D}'_0(\bar{P})$

Let $i : \mathfrak{D}_0 \rightarrow \mathfrak{D}$ be the canonical injection ; the transposed application ${}^t i : \mathfrak{D}' \rightarrow \mathfrak{D}'_0$ is linear and continuous. Now there exists a (non canonical) linear, continuous map $p : \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}_0$ such that $p \circ i = \mathbf{1}_{\mathfrak{D}_0}$: namely for some $f \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^4)$ such that

$$\int_{\mathbb{R}^4} f(\underline{x}) d^4 x = 1$$

we define

$$(p\varphi)(\underline{x}, \Lambda) = \varphi(\underline{x}, \Lambda) - f(\underline{x}) \int_{\mathbb{R}^4} \varphi(\underline{y}, \Lambda) d^4 y$$

The transposed application is such that ${}^t i \circ {}^t p = \mathbf{1}_{\mathfrak{D}'_0}$, so ${}^t i$ is surjective and $\mathfrak{D}'_0$ is the quotient of $\mathfrak{D}'$ by the subspace $\text{Ker } \mathfrak{D}_0 \subset \mathfrak{D}'$ of the distributions which vanish on $\mathfrak{D}_0$ (i.e. constant with respect to $\underline{x}$).

The partial derivation is naturally defined in $\mathfrak{D}'_0$ and is the transform by ${}^t i$ of the derivation in $\mathfrak{D}'$.

The product by a C^∞ function $\alpha(\underline{x}, \Lambda)$ depending effectively on $\underline{x}$ is not defined every where in $\mathfrak{D}'_0$ ($\varphi \in \mathfrak{D}_0 \not\Rightarrow \alpha\varphi \in \mathfrak{D}_0$), however it is defined on elements of $\mathfrak{D}'_0$ which are derivatives with respect to $\underline{x}$:

$$\langle \alpha \partial_\mu T, \varphi \rangle = - \langle T, \partial_\mu (\alpha\varphi) \rangle ; \quad \partial_\mu (\alpha\varphi) \in \mathfrak{D}_0$$

Then it is the transform by ${}^t i$ of the multiplication by α in $\mathfrak{D}'$.

c) Resolution of (A), (B), (5.1), (5.2), (5.3) in $\mathfrak{D}'_0$

α - The differential operators which appear in the equations

$$\mathfrak{P}_\mu T = 0 \quad (A) \quad \mathfrak{M}_{\mu\nu} T = 0 \quad (B)$$

$$(\underline{P}^2)T = 0 \quad (5.1) \quad (\underline{W}^2)T = 0 \quad (5.2) \quad (W_\mu - i\lambda P_\mu)T = 0 \quad (5.3)$$

have a meaning as operators in $\mathfrak{D}'_0$ and we have to solve this system of equations in $\mathfrak{D}'_0$. From the definition of $\text{Ker } \mathfrak{D}_0$ we see that it is equivalent to solve

$$\begin{aligned} \partial_\rho \mathfrak{P}_\mu T &= 0 \quad (a) & \partial_\rho \mathfrak{M}_{\mu\nu} T &= 0 \quad (b) \\ \partial_\rho (\underline{P}^2) T &= 0 \quad (c) & \partial_\rho (\underline{W}^2) T &= 0 \quad (d) & \partial_\rho (W_\mu - i\lambda P_\mu) T &= 0 \quad (e) \end{aligned} \quad (5.4)$$

in $\mathfrak{D}'$, each solution being well defined up to a distribution in $\text{Ker } \mathfrak{D}_0$.

β - The central distributions already found are obviously solutions of the new "class equations" (5.4, a), (5.4, b). But we have now other solutions namely (modulo $\text{Ker } \mathfrak{D}_0$)

$$\delta(u_2) \theta(4 - u_1^2) T_\pm(u_1) \text{Log} |\hat{\eta}^\mu \pm \sqrt{4 - u_1^2} \hat{\xi}^\mu| \quad (5.5)$$

(which are independant of μ , mod. $\text{ker } \mathfrak{D}_0$: we shall take $\mu = 0$ in the following).

It is quite remarkable that these solutions depend on variables which are no more constant on the conjugation classes of $\bar{P}$.

We note that the sum of two distributions of the form (5.5) with opposite signs in the argument of the Log, and with $T_+(u_1) = T_-(u_1) = T(u_1)$ is equal (mod. $\text{Ker } \mathfrak{D}_0$) to the "old" solution

$$\delta(u_2) \theta(4 - u_1^2) T(u_1) \text{Log} |Q|$$

γ - Distributions (4.1) remain solutions of (5.4, c), (5.4, d) and so do distributions (4.2) with $T(Q)$ solution of (4.3) with $w^2 = 0$, that is

$$\delta(u_2) \delta(u_1 \pm 2) [a_\pm \text{Log} |Q| + b_\pm \varepsilon(\hat{\eta}^0) + c_\pm \sqrt{-Q} \varepsilon(\hat{\eta}^0)] \quad (5.6)$$

New solutions appear :

$$\delta(u_2) T(u_1) Q \quad (5.7)$$

Last, distributions of the form (5.5) are solutions of (5.4,c), (5.4,d); as for $m^2 \neq 0$ $\underline{W}^2$ highers the transversal order of the other central distributions.

δ - We now search solutions of (5.4,c) among distributions (4.1), (5.5), (5.6), (5.7).

1. For (5.5) and outside $u_1 = \pm 2$, we have

$$\begin{aligned} (P^-) \delta(u_2) \theta(4 - u_1^2) \alpha_{\pm}(u_1) \log |\hat{\eta}^0 \pm \sqrt{4 - u_1^2} \hat{\xi}^0| &= \\ = \delta(u_2) \theta(4 - u_1^2) \alpha_{\pm}(u_1) \frac{\hat{z}^{0\alpha} \hat{z}_{\mu\alpha} \pm \sqrt{4 - u_1^2} \hat{z}^{0\mu}}{\hat{\eta}^0 \pm \sqrt{4 - u_1^2} \hat{\xi}^0} \end{aligned}$$

$$\text{and (using the relation } Q = \frac{\hat{\eta}^\mu \hat{\xi}^\nu - \hat{\eta}^\nu \hat{\xi}^\mu}{\hat{z}^{\mu\nu}} \quad \forall \mu \neq \nu \text{ if } u_2 = 0)$$

$$\begin{aligned} 2(W_\mu) \delta(u_2) \theta(4 - u_1^2) \alpha_{\pm}(u_1) \log |\hat{\eta}^0 \pm \sqrt{4 - u_1^2} \hat{\xi}^0| &= \\ = \delta(u_2) \theta(4 - u_1^2) \left\{ \frac{\pm u_1}{\sqrt{4 - u_1^2}} \alpha_{\pm}(u_1) \mp \sqrt{4 - u_1^2} \alpha'_{\pm}(u_1) \right\} \frac{\hat{z}^{0\alpha} \hat{z}_{\mu\alpha} \pm \sqrt{4 - u_1^2} \hat{z}^{0\mu}}{\hat{\eta}^0 \pm \sqrt{4 - u_1^2} \hat{\xi}^0} \\ & \quad (\text{mod. Ker } \mathfrak{D}_0) \end{aligned}$$

So (5.4,c) gives

$$u_1 \alpha_{\pm}(u_1) - (4 - u_1^2) \alpha'_{\pm}(u_1) = \pm 2i\lambda \sqrt{4 - u_1^2} \alpha_{\pm}(u_1)$$

and with $u_1 = 2 \cos \varphi$ ($0 \leq \varphi \leq \pi$)

$$\alpha_{\pm}(u_1) = \alpha_{\pm} \frac{e^{\pm 2i\lambda\varphi}}{\sin \varphi} \quad (\alpha_{\pm} \text{ is a constant})$$

Now the only global solution is the combination

$$S_\lambda = -\delta(u_2)\theta(4-u_1^2)\left\{\frac{e^{2i\lambda\varphi}}{\sin\varphi}\log|\hat{\eta}^0 + \sqrt{4-u_1^2}\hat{\xi}^0| + \frac{e^{-2i\lambda\varphi}}{\sin\varphi}\log|\hat{\eta}^0 - \sqrt{4-u_1^2}\hat{\xi}^0|\right\} \quad (5.8)$$

2. For (4.1) we have (outside $\hat{\xi}^\mu = 0$, $\forall \mu$ and $u_1^2 = 4$)

$$(P^\mu)\delta(u_2)T(u_1, Q) = -2\delta(u_2)T'_Q(u_1, \varphi)\hat{\eta}^\mu$$

$$(W^\mu)\delta(u_2)T(u_1, Q) = \delta(u_2)\{2u_1Q T''_Q(u_1, Q) + 3u_1 T'_Q(u_1, Q) + (u_1^2 - 4)T''_{u_1Q}(u_1, Q)\}\hat{\xi}^\mu$$

The vectors $\hat{\eta}$ and $\hat{\xi}$ are proportionnal if and only if $Q = 0$, where

$$\hat{\eta}^\mu = 2(\hat{\eta}^0)\varepsilon(\hat{\xi}^0)\sqrt{4-u_1^2}\hat{\xi}^\mu$$

and so $T'_Q(u_1, Q)$ must vanish for $Q \neq 0$ and solutions must be linear combinations of

$$T_\pm = \frac{1}{2}\delta(u_2)\theta(4-u_1^2)\beta_\pm(u_1)\{\theta(Q)\varepsilon(\hat{\xi}^0)^\pm\theta(-Q)\varepsilon(\hat{\eta}^0)\}$$

then

$$(P^\mu)T_\pm = 2\delta(u_2)\theta(4-u_1^2)\delta(Q)\beta_\pm(u_1)\{\theta(\hat{\xi}^0)\theta(\mp\hat{\eta}^0) - \theta(-\hat{\xi}^0)\theta(\pm\hat{\eta}^0)\}\hat{\eta}^\mu$$

$$(W^\mu)T_\pm = -\delta(u_2)\theta(4-u_1^2)\delta(Q)\{u_1\beta'_\pm(u_1) + (u_1^2 - 4)\beta_\pm(u_1)\}\{\theta(\hat{\xi}^0)\theta(\mp\hat{\eta}^0) - \theta(-\hat{\xi}^0)\theta(\pm\hat{\eta}^0)\}\hat{\xi}^\mu$$

(5.4,c) gives

$$u_1\beta'_\pm(u_1) - (4-u_1^2)\beta_\pm(u_1) = \pm 2i\lambda\sqrt{4-u_1^2}\beta_\pm(u_1)$$

with the solutions

$$\beta_{\pm}(u_1) = \beta_{\pm} \frac{e^{+2i\lambda\varphi}}{\sin \varphi} \quad (\beta_{\pm} \text{ are any constant})$$

there is only one global solution of (5.4,c) :

$$T_{\lambda} = \delta(u_2) \theta(4 - u_1^2) \left\{ \frac{\sin 2\lambda\varphi}{\sin \varphi} \theta(Q) \varepsilon(\hat{\xi}^0) - i \frac{\cos 2\lambda\varphi}{\sin \varphi} \theta(-Q) \varepsilon(\hat{\eta}^0) \right\}$$

3. The only solutions of (5.4,c) of the form (5.6) or (5.7) are

$$Y_{\pm} = \delta(u_2) \{ \delta(u_1 - 2) \pm \delta(u_1 + 2) \} \sqrt{-Q} \varepsilon(\hat{\eta}^0) = \delta(u_2) \{ \delta(u_1 + 2) \pm \delta(u_1 - 2) \} \frac{\hat{\eta}^0}{\sqrt{-\hat{z}^{0\alpha} \hat{z}^0_{\alpha}}}$$

which satisfy $(P^{\mu}) Y_{\pm} = (W^{\mu}) Y_{\pm} = 0 \quad (\text{mod. Ker } \mathfrak{D}_0)$

d) Characters of the unitary representations ($m^2 = 0$, $w^2 = 0$)

First the characters must have definite symmetry property under translations by $(0, -1) \in \bar{P}$. The solutions of the differential equations which have such a property are

- S_{λ} and T_{λ} if 2λ is a real integer (with "parity" $(-1)^{2\lambda}$)
- $Y_{\pm}$ (with "parity" ± 1)

For 2λ integer we have a three dimensional vector space of solutions spanned by S_{λ} , T_{λ} , $Y_{(-1)^{2\lambda}}$ in which we have to find the characters of

the two known unitary representations : they are of the form

$$\chi_{\lambda}^{+} = S_{\lambda} + x T_{\lambda} + iy Y_{(-1)^{2\lambda}} \quad (5.10)$$

where x, y (real because of hermitian symmetry) must be such that χ_{λ}^{+} is extremal of positive type.

Before going on we must note a property of the space $\mathfrak{D}_0$: the linear span of $\mathfrak{D}_0^{+}$ (the cone of functions of positive type in $\mathfrak{D}_0$) is not dense in $\mathfrak{D}_0$: the set of positive linear combinations of functions of the form $\alpha \star \tilde{\alpha}$ ($\alpha \in \mathfrak{D}$) is dense in $\mathfrak{D}^{+}$, so any $\varphi \in \mathfrak{D}_0^{+}$ can be approximated by such functions ; now if $\varphi = \alpha \star \tilde{\alpha}$, ($\alpha \in \mathfrak{D}$), $\varphi \in \mathfrak{D}_0$ implies $\alpha \in \mathfrak{D}_0$ and so

$$\int \varphi(x, \Lambda) a_{\mu} x^{\mu} dx = 0 \quad \forall \Lambda \in \bar{\mathfrak{L}}_0$$

for any linear function $a_{\mu} x^{\mu}$; so any distribution linear with respect to $\underline{x}$, vanishes on $\mathfrak{D}_0^{+}$ and so on the linear span of $\mathfrak{D}_0^{+}$, but not on $\mathfrak{D}_0$. (The linear span of $\mathfrak{D}_0^{+}$ is the closure of $\mathfrak{D}_0^2 = \{\varphi = \alpha \star \beta, \alpha, \beta \in \mathfrak{D}_0\}$).

Distributions $Y_{\pm}$ are linear in $\underline{x}$ and so vanish on $\mathfrak{D}_0^{+}$ and the fact that (5.10) is of positive type or not does not depend on the value of y : we have defined the character on a too small space to determine it completely by the properties given in I. On the other hand the calculation of x can theoretically be done but as in the case $m \neq 0$ we were not able to perform it ; we can thus only write :

$$\begin{aligned} \chi_{\lambda}^{+} &= \delta(u_2) \theta(4-u_1^2) \left\{ - \frac{e^{2i\lambda\varphi}}{\sin \varphi} \log |\hat{\eta}^0 + \sqrt{4-u_1^2} \hat{\xi}^0| + \frac{e^{-2i\lambda\varphi}}{\sin \varphi} \log |\hat{\eta}^0 - \sqrt{4-u_1^2} \hat{\xi}^0| \right\} \\ &\quad + x \left[\frac{\sin 2\lambda\varphi}{\sin \varphi} \theta(+Q) \varepsilon(\hat{\xi}^0) - i \frac{\cos 2\lambda\varphi}{\sin \varphi} \theta(-Q) \varepsilon(\hat{\eta}^0) \right] \\ &\quad + iy \delta(u_2) \{ \delta(u_1-2) + (-1)^{2\lambda} \delta(u_1+2) \} \frac{\hat{\eta}^0}{\sqrt{-\hat{z}^{0\alpha}} \hat{z}^0_{\alpha}} \end{aligned} \quad (5.11)$$

The χ_λ are (with the right x and y) the characters of the helicity representations $[0, \lambda, \pm]$ of $\bar{P}$.

(We note that S_λ and so χ_λ^+ is not bounded, but an element of $\mathfrak{D}'_0$ can be of positive type and not bounded).

e) The remaining solutions

We list for the sake of completeness the other solutions, which might be related to the characters of some non unitary representations.

1. We have seen that

$$Y_{\pm} = \delta(u_2) [\delta(u_1+2) \pm \delta(u_1-2)] \frac{\hat{\eta}^0}{\sqrt{-\hat{z}^{0\alpha} \hat{z}^0_{\alpha}}}$$

are solutions of (5.4,a) to (5.4,e) ; moreover they vanish on $\mathfrak{D}_0^+$ and so are, in the limit, "of positive type". It is only from the fact that they are no other unitary representations of $\bar{P}$ than the helicity ones that we can assert that $Y_{\pm}$ are at most the restriction to $\mathfrak{D}'_0$ of the character of some non unitary representation.

2. Last we have solutions of (5.4,a) to (5.4,d) :

- for 2λ real integer

$$\delta(u_2) \theta(4 - u_1^2) \left\{ \frac{e^{-2i\lambda\varphi}}{\sin \varphi} \log |\hat{\eta}^0 + \sqrt{4 - u_1^2} \hat{\xi}^0| - \frac{e^{2i\lambda\varphi}}{\sin \varphi} \log |\hat{\eta}^0 - \sqrt{4 - u_1^2} \hat{\xi}^0| \right\}$$

and

$$\delta(u_2) \theta(4 - u_1^2) \left\{ \frac{\cos 2\lambda\varphi}{\sin \varphi} \theta(Q) \varepsilon(\hat{\xi}^0) + i \frac{\sin 2\lambda\varphi}{\sin \varphi} \theta(-Q) \varepsilon(\hat{\eta}^0) \right\}$$

$$- \delta(u_2) [\delta(u_1+2) \pm \delta(u_1-2)] (a_{\pm} \log|Q| + b_{\pm} \varepsilon(\hat{\eta}^0))$$

- with f even or odd :

$$\delta(u_2) Q^f(u_1)$$

f) Frobenius formula

The same remarks as for the characters of the representations with $m^2 \neq 0$ can be done here, the character of the inducing representation (the little group is again $R^4 \times E(2)$, the inducing representation being now trivial for the translation of $E(2)$) is :

$$e^{-2i\lambda\varphi} e^{i\underline{p}\underline{x}}$$

with $\underline{p}^2 = 0$ $\underline{x} \in R^4$.

As a conclusion to this paragraph, we mention the help we found in studying first the characters of the 0-mass representations of the group $R.R^2$ where R acts on the two dimensional translation group R^2 through the matrices $\begin{pmatrix} \text{ch } \eta & \text{sh } \eta \\ \text{sh } \eta & \text{ch } \eta \end{pmatrix}$. For this group the characters can easily be obtained, as well by mean of the usual integral kernel method, as by our differential procedure. They possess a structure very similar to (5.11).

6. Characters of $SL(2, \mathbb{C})$

From the central distributions $T(u_1, u_2)$ which do not depend on $\underline{x}$, we can extract the characters of the representations of $SL(2, \mathbb{C})$ (which are also representations of $\bar{P}$) : they are the solutions of the eigen-equations :

$$A\chi = a\chi \quad (6.1) \quad B\chi = b\chi \quad (6.2)$$

where A and B are the Laplace operators of $SL(2, \mathbb{C})$:

$$A = \frac{1}{2} M^{\mu\nu} M_{\mu\nu} \quad B = \frac{1}{4} \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho} M_{\lambda\mu} M_{\nu\rho}$$

$M^{\alpha\beta}$ being the differential operator given in (IV,0,1), in which the derivatives with respect to $\underline{x}$ now vanish.

With $u = u_1 + iu_2$, $a_{1,2} = a + ib$, (6.1), (6.2) takes the form :

$$\begin{aligned} (u^2 - 4) \frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2} + 3u \frac{\partial \chi}{\partial u} + 4q_1 \chi &= 0 \\ (\bar{u}^2 - 4) \frac{\partial^2 \chi}{\partial \bar{u}^2} + 3\bar{u} \frac{\partial \chi}{\partial \bar{u}} + 4q_2 \chi &= 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

Now if we set $u = 2 \operatorname{ch}(\eta + i\varphi)$, $\eta \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, we find that two independant global solutions of (6.3) are $(\sigma_i = \sqrt{1 - 4q_i})$:

$$\begin{aligned} R &= \frac{\operatorname{sh} \sigma_1(\eta + i\varphi) \operatorname{sh} \sigma_2(\eta - i\varphi)}{|\operatorname{sh}(\eta + i\varphi)|^2} \\ S &= \frac{\operatorname{ch} \sigma_1(\eta + i\varphi) \operatorname{ch} \sigma_2(\eta - i\varphi)}{|\operatorname{sh}(\eta + i\varphi)|^2} \end{aligned}$$

(the singular points of (6.1), (6.2), $\eta = 0$, $\varphi = 0, \pi$, do not divide the set of the parameters into disconnected parts : this comes from the fact that $SL(2, \mathbb{C})$ is a semisimple complex group).

Our usual "parity" requirement ($\varphi \rightarrow \varphi + \pi$) enforces $\sigma_1 + \sigma_2$ or $\sigma_1 - \sigma_2$ to be an integer.

- 1) One and only one of the numbers $\sigma_1 + \sigma_2$ and $\sigma_1 - \sigma_2$ is a real integer

σ_1 and σ_2 are only defined up to the sign, we choose them in such a way that

$$\sigma_1 + \sigma_2 = m > 0 \quad m : \text{integer}$$

- a) - If $m > 0$, σ_1 and σ_2 are now completely defined (with their sign).
We put $\sigma_1 - \sigma_2 = i\rho \neq 0$ (ρ is a well defined complex number).
Then we have one (global) solution :

$$\chi_{m,\rho} = \frac{\cos(\rho\eta + m\varphi)}{|\operatorname{sh}(\eta + i\varphi)|^2} \quad (= \text{S-R})$$

- b) - If $m = 0$, i.e. $q_1 = q_2$, we have choosen $\sigma_1 = -\sigma_2$ but the sign of σ_1 is arbitrary. We put $\sigma_1 - \sigma_2 = i\rho \neq 0$, ρ is a complex number defined up to the sign.
We have one solution :

$$\chi_{0,\rho} = \frac{\cos \rho\eta}{|\operatorname{sh}(\eta + i\varphi)|^2}$$

We note that $\chi_{m,\rho}$ has parity $(-1)^m$.

Unitary representations

$$\text{Unitary implies} \quad q_1 = \bar{q}_2 \quad .$$

$m > 0$: We have $\sigma_1 = \bar{\sigma}_2$ and $\rho \neq 0$ is any real number, $\chi_{m,\rho}$ is the well known character of the corresponding representation (m,ρ) of the principal series.

$$\underline{m} = 0 : q_1 = q_2, \sigma_1 = -\sigma_2$$

* If $1 - 4q_i < 0$, σ_i is pure imaginary. One can choose ρ real positive, and one has the character of the representation $(0, \rho)$ of the principal series.

* If $1 - 4q_i > 0$, σ_i is real, $-i\rho$ can be chosen real positive.

If $0 < q_i < \frac{1}{4}$, $\chi_{0, \rho}$ is bounded, it is the character of the representation $(0, \rho)$ of the complementary series ($0 < -i\rho < 2$).

If $q_i < 0$, $\chi_{0, \rho}$ is not bounded and is the character of a non unitary representation.

2) Both $\sigma_1 + \sigma_2$ and $\sigma_1 - \sigma_2$ are real integers

This condition implies that σ_1 and σ_2 are both integers or both half integers.

a) σ_1 and σ_2 are half integers

One can choose σ_1 and σ_2 positive. $S + R$ and $S - R$ have opposite parity, so we have the two solutions :

$$\chi_+ = \frac{\text{ch}[(\sigma_1 + \sigma_2)\eta + i(\sigma_1 - \sigma_2)\varphi]}{|\text{sh}(\eta + i\varphi)|^2} \quad (= S + R) \quad \text{parity } (-1)^{\sigma_1 + \sigma_2 + 1}$$

$$\chi_- = \frac{\text{ch}[(\sigma_1 - \sigma_2)\eta + i(\sigma_1 + \sigma_2)\varphi]}{|\text{sh}(\eta + i\varphi)|^2} \quad (= S - R) \quad \text{parity } (-1)^{\sigma_1 + \sigma_2}$$

χ_- is bounded for $\sigma_1 = \sigma_2$, we then have :

$$\chi_- = \chi_{m, 0}$$

where $\chi_{m, 0}$ is the character of the representation $(m, 0)$ of the principal series (with $m = \sigma_1 + \sigma_2$, odd).

χ_+ is bounded for $\sigma_1 = \sigma_2 = 1/2$ and we have :

$$\chi_+ = \chi_{0,i}$$

character of a representation of the complementary series.

b) - σ_1 and σ_2 are integers

R and S are global solutions with the same parity $(-1)^m$ ($m = \sigma_1 + \sigma_2$) so there is a solution (R) which is a continuous function on G : it is the character

$$\chi_{j_1 j_2}^f = \frac{\text{sh}(2j_1 + 1)(\eta + i\varphi) \text{sh}(2j_2 + 1)(\eta - i\varphi)}{|\text{sh}(\eta + i\varphi)|^2}$$

of the finite dimensional representation D_{j_1, j_2} .

$\sigma_i = 2j_i + 1$ with $j_i = 0, \frac{1}{2}, 1 \dots$

(if one of the σ 's is zero, the corresponding R is zero). We have $\chi_{00}^f = 1$, the character of the trivial representation which is the only finite dimensional unitary representation !

On the other hand :

$$\chi_{\frac{1}{2}, 0}^f = 2\text{ch}(\eta + i\varphi) = u$$

Now we have to find a second linear combination of R and S which is the character of the other (known) representation corresponding to the given values of q_1 and q_2 .

If $\sigma_1 = \sigma_2$ there is a unique bounded linear combination of R and S, namely :

$$\chi_{m,0} = \frac{\cos(\sigma_1 + \sigma_2)\varphi}{|\operatorname{sh}(\eta + i\varphi)\eta|^2}$$

which is the character of the unitary representation $(m,0)$ of the principal series $(m = \sigma_1 + \sigma_2, \text{ even})$.

If $\sigma_1 \neq \sigma_2$ we have not yet found any argument to determine what linear combination of R and S is the character of the corresponding non unitary representation.

ACKNOWLEDGEMENTS

The authors are grateful to Professor J. Lascoux who introduced them to the problems related with characters and gave them precious advices and criticisms. They also thank Professor Joos, Professor Rideau and Doctor Schrader for helpful discussions.

APPENDIX A

Calculation of the limits of the distributions

$$\delta(u - 2 \pm \eta), \quad \delta'(u - 2 \pm \eta) \quad \eta > 0$$

1) Limit of $\delta(u - 2 - \eta)$:

This distribution is defined by

$$\langle \delta(u - 2 - \eta), \varphi \rangle = \int \varphi \frac{dv dr}{|s|} \Big|_{u=2+\eta} = \int_{C_\eta} \varphi d\omega_\eta \quad \varphi \in \mathcal{D}(G)$$

where the last integral is the sum of φ over the one sheet hyperboloid $C_\eta(u = 2 + \eta)$ with its invariant measure $d\omega_\eta = \frac{dv dr}{|s|}$.

Now

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{C_\eta} \varphi d\omega_\eta = \int_{C_0} \varphi d\omega_0 \quad (A.1)$$

(integral over the cone $C_0(u = 2)$ with the measure $d\omega_0 = \frac{dv dr}{|s|}$).

Therefore the distribution $\delta(u - 2 - \eta)$ has a limit defined by (A.1).

We write

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \delta(u - 2 - \eta) = \delta(u - 2)$$

2) Limit of $\delta'(u - 2 - \eta)$:

Using the change of variables

$$r = \rho \cos \vartheta \quad v = \rho \sin \vartheta$$

we can write

$$\langle \delta'(u-2-\eta), \phi \rangle = - \frac{d}{du} \int_{\rho > \sqrt{u^2-4}} \frac{\phi_+ + \phi_-}{\sqrt{\rho^2 - u^2 + 4}} \rho d\rho d\theta \Big|_{u=2+\eta}$$

$$\phi_+ = \phi|_{s>0} \quad \phi_- = \phi|_{s<0}$$

we have

$$\begin{aligned} I_{\pm} &= \int_{\rho > \sqrt{u^2-4}} \frac{\phi_{\pm}}{\sqrt{\rho^2 - u^2 + 4}} \rho d\rho d\theta \\ &= \int d\theta \left[\phi_{\pm} \sqrt{\rho^2 - u^2 + 4} \right]_{\rho > \sqrt{u^2-4}}^{\infty} - \int_{\rho > \sqrt{u^2-4}} \frac{\partial \phi_{\pm}}{\partial \rho} \sqrt{\rho^2 - u^2 + 4} d\rho d\theta \end{aligned}$$

The integrated part is equal to zero therefore

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} I_{\pm} &= - \int_{\rho > \sqrt{u^2-4}} \frac{\partial^2 \phi_{\pm}}{\partial u \partial \rho} \sqrt{\rho^2 - u^2 + 4} d\rho d\theta \\ &\quad + u \int_{\rho > \sqrt{u^2-4}} \frac{\partial \phi_{\pm}}{\partial \rho} \frac{d\rho d\theta}{\sqrt{\rho^2 - u^2 + 4}} + A \end{aligned}$$

(A, the derivative of the lower bound, will not contribute by compensation).

With

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} &= \cos \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} + \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial v} + \frac{\rho}{s} \frac{\partial \phi}{\partial s} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial \rho} &= - \frac{u}{s} \left[\cos \theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial s} + \sin \theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial v \partial s} + \frac{\rho}{s} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} - \frac{\rho}{s^2} \frac{\partial \phi}{\partial s} \right] \end{aligned}$$

we have

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} I_{\pm} &= u \int_{\rho > \sqrt{u^2 - 4}} \left(\frac{\partial^2 \varphi_{\pm}}{\partial r \partial s} \cos \theta + \frac{\partial^2 \varphi_{\pm}}{\partial v \partial s} \sin \theta \right) d\rho d\theta \\ &+ u \int_{\rho > \sqrt{u^2 - 4}} \frac{\frac{\partial^2 \varphi_{\pm}}{\partial s^2} \rho d\rho d\theta}{\sqrt{\rho^2 - u^2 + 4}} + u \int_{\rho > \sqrt{u^2 - 4}} \left(\frac{\partial \varphi_{\pm}}{\partial r} \cos \theta + \frac{\partial \varphi_{\pm}}{\partial v} \sin \theta \right) \frac{d\rho d\theta}{\sqrt{\rho^2 - u^2 + 4}} \end{aligned}$$

The derivatives of φ with respect to v, r, s are infinitely differentiable therefore bounded, and have compact supports. The first two terms are then bounded by a constant A , independant of η , and the third by:

$$B \int_{\sqrt{4\eta}}^C \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 - 4\eta}} = B \cosh^{-1} \frac{C}{2\sqrt{\eta}}$$

where B and C are constants (C is an upper bound of ρ in the support of φ).

Therefore, though the distribution $\delta'(u - 2 - \eta)$ has no limit in $\mathcal{D}'(G)$, the distribution $\eta^\alpha \delta'(u - 2 - \eta)$ has the limit zero for $\alpha > 0$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \eta^\alpha \delta'(u - 2 - \eta) = 0 \quad \forall \alpha > 0$$

3) Limit of $\delta(u - 2 + \eta)\theta(\pm s)$:

This distribution is defined by

$$\langle \delta(u - 2 + \eta)\theta(\pm s), \varphi \rangle = \int_{s \gtrless 0} \varphi \frac{dv dr}{|s|} \Big|_{u=2-\eta} = \int_{C_{-\eta}^{\pm}} \varphi d\omega_{-\eta}$$

integral over the upper or lower sheet of the hyperboloid $C_{-\eta}$ ($u = 2 - \eta$).

Now

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{C_{-\eta}^{\pm}} \varphi d\omega_{-\eta} = \int_{C_0^{\pm}} \varphi d\omega_0$$

integral over the upper or lower sheet of the cone C_0 . We shall write

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \delta(u - 2 - \eta) \theta(\pm s) = \delta(u - 2) \theta(\pm s)$$

4) Limit of $\delta'(u - 2 + \eta) \theta(\pm s)$:

With the previous notations :

$$\langle \delta'(u - 2 + \eta) \theta(\pm s), \varphi \rangle = - \frac{d}{du} \left[\int_{\rho > 0} \frac{\varphi_{\pm}}{\sqrt{\rho^2 - u^2 + 4}} \rho d\rho d\theta \right] \Big|_{u=2-\eta}$$

$$\begin{aligned} J_{\pm} &= \int_{\rho > 0} \frac{\varphi_{\pm} \rho d\rho d\theta}{\sqrt{\rho^2 - u^2 + 4}} \\ &= \int d\theta \left[\varphi_{\pm} \sqrt{\rho^2 - u^2 + 4} \right] \Big|_0^{\infty} - \int_{\rho > 0} \frac{\partial \varphi_{\pm}}{\partial \rho} \sqrt{\rho^2 - u^2 + 4} d\rho d\theta \end{aligned}$$

The first term is

$$\int d\theta \left[\varphi_{\pm} \sqrt{\rho^2 - u^2 + 4} \right] \Big|_0^{\infty} = -2\pi \varphi_{\pm}(u, \rho = 0) \sqrt{4 - u^2}$$

Therefore, neglecting terms in $O(\sqrt{\eta})$

$$- \frac{d}{du} \left[-2\pi \varphi_{\pm}(u, \rho = 0) \sqrt{4 - u^2} \right] \Big|_{u=2-\eta}$$

$$= 4\pi \sqrt{\eta} \frac{\partial \varphi_{\pm}}{\partial u} (2 - \eta, 0) - 2\pi \varphi_{\pm}(2 - \eta, 0) \frac{1}{\sqrt{\eta}}$$

$$\simeq +4\pi \frac{\partial \varphi_{\pm}}{\partial s} (2 - \eta, 0) - 2\pi \varphi_{\pm}(2 - \eta, 0) \frac{1}{\sqrt{\eta}}$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} = - \frac{u}{s} \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)$$

The second term is developed as in 2) and is bounded by

$$A + B \int_0^C \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 + 4\eta}} = A + B \sinh^{-1} \frac{C}{2\sqrt{\eta}}$$

So $\eta^\alpha \frac{d}{d\bar{u}} J_{\pm} \Big|_{2-\eta}$ has a limit only if $\alpha \geq 1/2$, and

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \sqrt{\eta} \frac{d}{d\bar{u}} J_{\pm} \Big|_{u=2-\eta} = 2\pi \varphi_{\pm}(0,0) = 2\pi \varphi(2)$$

therefore

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \sqrt{\eta} \delta'(u-2+\eta) \theta(\pm s) = -2\pi \delta(v) \delta(r) \delta(s)$$

We list here some relations connected with our parametrization of $\bar{P}$ and which are of continual use.

The basic ones are of course the equations of the group manifold. Some others appear only on submanifolds. At last some are just consequences of the properties of the $\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$ tensor.

On the whole group manifold we have

$$\hat{z}^{\lambda\mu} \hat{z}_{\lambda\nu} = (u_1^2 - u_2^2 - 4)g_{\nu}^{\mu} + z^{\mu\lambda} z_{\lambda\nu}$$

$$\hat{z}^{\lambda\mu} z_{\lambda\nu} = -u_1 u_2 g_{\nu}^{\mu}$$

$$\frac{1}{2} \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho} \hat{z}_{\nu\rho} = -z^{\lambda\mu}$$

$$(y z z \dots zy) = 0$$

where the bracket is a completely contracted quantity, y any vector, the number of z being odd. This gives for instance

$$x^{\mu} \xi_{\mu} = x^{\mu} \tilde{\xi}_{\mu} = 0$$

On $u_2 = 0$ only we have furthermore

$$z^{\alpha\gamma} z_{\gamma\mu} \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho} = z^{\alpha\pi} \hat{z}^{\nu\rho}$$

$$z^{\alpha\beta} \hat{z}_{\alpha\beta} = 0 \quad \xi^{\alpha\gamma} \tilde{\xi}_{\alpha\gamma} = 0$$

$$Q = \hat{\xi}^2 = \frac{\hat{\eta}^{\mu\nu} \hat{\eta}_{\mu\nu} + (u_1^2 - 4) \hat{\xi}^{\mu} \hat{\xi}^{\nu}}{z^{\mu\lambda} z_{\lambda\nu}} \quad V_{\mu,\nu}$$

$$= \frac{\hat{\eta}^{\mu\nu} \hat{\xi}^{\nu} - \hat{\eta}^{\nu\mu} \hat{\xi}^{\mu}}{z^{\mu\nu}} \quad V_{\mu}{}^{\nu}{}_{\mu}{}^{\nu}$$

APPENDIX C

We give here the general line we followed for the calculation of the limit of the distributions :

$$\delta(u_2)F \quad [(1.5) \text{ to } (1.11)] \quad (\underline{W}^2 - w^2)[R, S(u_1)\theta(\pm(u_1^2 - 4) - \varepsilon)] \quad (C.1)$$

where the F are the $\underline{x}$ depending parts of distributions (1.9) (for $u_1^2 - 4 > \varepsilon$) or (1.5) to (1.8), (1.10), (1.11) (for $4 - u_1^2 > \varepsilon$).

1) Parametrization of $SL(2, \mathbb{C})$

We introduce briefly here an other parametrization of $SL(2, \mathbb{C})$, which possesses no formal covariance, but leads us for our present purpose to easier calculations. We define the trivectors :

$$\begin{aligned} a_k &= \dot{z}_{ok} \\ b_k &= z_{ok} \end{aligned}$$

The group manifold is then :

$$\begin{aligned} u_1 u_2 + \vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \\ u_1^2 - u_2^2 + \vec{a}^2 - \vec{b}^2 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

and we get :

$$\dot{\xi}^0 = \vec{a} \cdot \vec{x} \quad \hat{\eta}^0 = \vec{x} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{a}) - \vec{a}^2 \cdot x^0$$

Now outside the center of the group ($a = b = 0$) and on $u_2 = 0$, we can take as new space coordinate system the unit vectors :

$$\hat{a}, \quad \hat{b} \quad \text{and} \quad \hat{n} = \hat{a} \wedge \hat{b}$$

We then have $(x, y, z = \vec{ax}, \vec{bx}, \vec{cx})$.

$$Q = -[(ax^0 + bz)^2 + (b^2 - a^2)x^2] \quad \text{and} \quad \lambda = x \quad (C.2)$$

2) The distributions (C.1) are defined by the integrals :

$$I_{R,S}^{+, \varepsilon}[(1.5) \text{ to } (1.11)] = \int \delta(u_2) F(1.5) \text{ to } (1.11) R, S(u_1) \varphi(x^\lambda, z^{\mu\nu}) d^4x \frac{d^6z}{u_1^6}$$

where $\varphi(x^\lambda, z^{\mu\nu}) \in \mathfrak{D}(\overline{P})$.

Using equation (2.2), of which R and S are solutions, we find by partial integration :

$$I_{R,S}^{+, \varepsilon} = \int \delta(u_2) F D_{R,S}^{+, \varepsilon}(u_1) \varphi(x^\lambda, z^{\mu\nu}) d^4x \frac{d^6z}{u_1^6} \quad (C.3)$$

where the distribution $D_{R,S}^{+, \varepsilon}$ is ($g = R$ or S) :

$$D_{R,S}^{+, \varepsilon} = \pm 6\delta(u_1^2 - 4\pm\varepsilon)g(\sqrt{4\pm\varepsilon}) + 4\varepsilon\delta(u_1^2 - 4\pm\varepsilon)g'(\sqrt{4\pm\varepsilon}) + 4\varepsilon\delta'(u_1^2 - 4\pm\varepsilon)g(\sqrt{4\pm\varepsilon}) \quad (C.4)$$

(in the following all our open sets will exclude the point $u_1 = -2$).

With the parametrization defined above we can also write :

$$I_{R,S}^{+, \varepsilon} = \int F D_{R,S}^{+, \varepsilon} \varphi(x_0, x, y, z, a, b, \Omega_a, \varphi_{ab}, \sqrt{b^2 - a^2 + 4}) d^4x \frac{a da d\Omega_a}{2\sqrt{b^2 - a^2 + 4}} b db d\varphi_{ab}$$

3) For $I^{+, \varepsilon}(u_1^2 - 4 = b^2 - a^2 > \varepsilon)$, we define :

$$\sqrt{b^2 - a^2} x_3 = ax_0 + bz \quad \text{so that} \quad z = \frac{Q}{u_1^2 - 4} = -(x^2 + x_3^2)$$

1. - Now if we calculate (C.3) for B and with $D_R^{+, \varepsilon}$ replaced by $\delta(b^2 - a^2 - \varepsilon)P(\sqrt{4 + \varepsilon})$, we find that this integral has a limit in ε which is (here $F = J_0(\sqrt{m^2}Z)$) :

$$L_1^R = \frac{1}{4} A(2) \int J_0(\sqrt{m^2(x_0^2 + x_3^2)}) \varphi(x_0, x, y, -x_0, a, a, \Omega_a, \varphi_{ab}, 2) dx_0 dx dy dX_3 da d\Omega_a d\varphi_{ab}$$

The variable X_3 does not appear any more in φ , so we can perform the corresponding integration with the result

$$L_1^R = \frac{1}{4m} A(2) \int \cos \sqrt{-m^2 x^2} \varphi(x_0, x, y, -x_0, a, a, \Omega_a, \varphi_{ab}, 2) dx_0 dx dy da d\Omega_a d\varphi_{ab}$$

With $L_1^R = \langle \mathcal{L}_1^R, \varphi \rangle$ and going back to covariant formulation we see that :

$$\mathcal{L}_1^R = \frac{1}{2} \delta(u_2) \delta(u_1^2 - 4) \delta\left(\frac{\eta^0}{\sqrt{-\hat{z}^0 \alpha} \hat{z}^0_\alpha}\right) \cos m \lambda A(u_1)$$

The complete calculation of $I_R^{+, \varepsilon}$ gives :

$$I_R^{+, 0} = 2 \langle \mathcal{L}_1, \varphi \rangle$$

i.e. our limit is central and eigendistribution of $\underline{P}^2$ (see (1.12)) as it has to be.

2. - If we calculate similarly (C.3) for S with $D_S^{+, \varepsilon}$ replaced by $\delta(b^2 - a^2 - \varepsilon)S(\sqrt{4 + \varepsilon})$, we find that the integral is divergent in the limit $\varepsilon = 0$. Neglecting terms which go to 0 with ε we find :

$$L_1^S = \frac{L_1^R}{\sqrt{\varepsilon}} + M_1$$

where the integral M_1 , which defines a distribution with support $a = b = 0$ (center of $SL(2, \mathbb{C})$) is in fact 0. The complete calculation of $I_S^{+, \varepsilon}$

$(\delta' = -\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \delta)$ gives :

$$I_S^{+,0} = 0$$

4) For $I^{-,\varepsilon}$ ($4 - u_1^2 = a^2 - b^2 > \varepsilon$) we define :

$$\sqrt{a^2 - b^2} t = ax_0 + bz$$

so that :

$$\tau = t^2 - x^2, \quad \varepsilon(\hat{\xi}^0) = \varepsilon(x), \quad \varepsilon(\hat{\eta}^0) = -\varepsilon(t)$$

1. - For R the calculation goes as in 3), each term of $D_R^{-,\varepsilon}$ having separately a limit L_i^R the support of which is

$$u_2 = u_1^2 - 4 = \frac{\hat{\eta}_0^0}{\sqrt{-\hat{z}_\alpha^0 \hat{z}^{0\alpha}}} = 0. \quad \text{Usual integrals of Bessel}$$

functions are needed to get results (2.4), (2.5).

2. - For S we get again developpements of the form $L_i^S = \frac{L_i^R}{\sqrt{\varepsilon}} + M_i$. The

L_i^R are the same integrals which appear for R ; we were not able to calculate the M_i (except in cases where they are 0 by symetry) whose supports are again the center of $SL(2, \mathbb{C})$; we were not able to perform the four necessary integrations, though we know the result had to be of the form $\Delta(\underline{x}^2)$, solution of $\underline{p}^2 = m^2 = 0$.

REFERENCES

- Ref. 1 : F.A. BEREZIN, Laplace Operators on semi-simple Lie groups, A.M.S.T. Series 2, Vol. 21.
- Ref. 2 : HARISH CHANDRA, The characters of semi-simple Lie groups, Trans. Amer. Math. Soc. 83, 1956.
- Ref. 3 : E. NELSON and W.F. SINESPRING, Amer. Jour. of Math. 58, p. 556
- Ref. 4 : L. SCHWARTZ, Théorie des distributions, Tome II (Hermann).
- Ref. 5 : J. DIXMIER, Les C* algèbres et leurs représentations, cahiers scientifiques.
- Ref. 6 : G.W. MACKEY, Infinite dimensional group representations, Colloquium at Stillwater, 1961.
- Ref. 7 : V. BARGMANN, Irreducible Unitary Representations of the Lorentz group, Annals of Math. 48, N° 3, 1947.
- Ref. 8 : I.M. GELFAND, M.I. GRAEV and N. Ya. VILENKIN , Generalized functions, Vol. 5, Acad. Press (N.Y.) 1966.
- Ref. 9 : I.M. GELFAND. Uspekhi, p. 29, 1962.
- Ref.10 : G.W. MACKEY, Annals of Physics 55 (1952) 101 and 58 (1953) 193.
- Ref.11 : H. JOOS and R. SCHRADER, On the primitive characters of the Poincaré group ; Lectures in Theor. Phys., Boulder Vol.VIIa.
- Ref.12 : R. SCHRADER, Thesis, to be published.

ERRATA

Page	Ligne	au lieu de	lire
I.7	-7	2. La distribution	2. La dérivation
I.15	-7	... un G-espace homogène ...	... un G-espace homogène symplec- tique ...
I.45	-6	(et réciproquement ...	(et réciproquement ...
I.55	6	$\theta(\eta)\theta(\xi)\mu = 0(\eta)\operatorname{div}_\mu(\xi)\mu =$	$\theta(\eta)\theta(\xi)\mu = \theta(\eta)\operatorname{div}_\mu(\xi)\mu =$
I.62	-3	$n_2 = n_1 + \lambda \frac{p_1}{m}$	$x_2 = x_1 + \lambda \frac{p_1}{m}$
I.65	-11	$\frac{\partial}{\gamma q^i}$	$\frac{\partial}{\partial q^i}$
I.67	-6	la représentation de v_{μ_0}	la représentation v_{μ_0}
I.75	5	$X = T^*(\mathbb{R}^2 \times \underline{SO(3)})$	$X = T^*(\mathbb{R}^3 \times \underline{SO(3)})$
I.86	1	les orbites correspant	les orbites correspondant
I.87	5	$-p^2 - m^2 > 0$	$-p^2 - m^2 = 0$
I.95	5	$-i \rho_\mu(x_i)$	$-i v_\mu(x_i)$
I.97	14	$\omega\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\Big _x, \frac{\partial}{\partial p_j}\Big _x\right) = \delta_i^j$	$\omega_x(\gamma(p_j)_x, \gamma(q^i)_x) = \delta_j^i$
I.97	15	$\frac{\partial}{\partial q^i}\Big _x, \frac{\partial}{\partial p_j}\Big _x$	$\gamma(q^i)_x, \gamma(p_j)_x$
I.104	-1	$\overline{\hbar_{\lambda P_0}} = \mathcal{O} J_3 \oplus \mathcal{O}(J_1 - i J_2)$	$\overline{\hbar_{-\lambda P_0}} = \mathcal{O} J_3 \oplus \mathcal{O}(J_1 - i J_2)$

Errata (suite)

Page	Lire	au lieu de	lire
II. 9	14	$\chi_1 = a \chi_2 \quad \chi_2 = (1 - a) \chi_1$	$\chi_1 = a \chi \quad \chi_2 = (1 - a) \chi$
II.14	-8	U_i	U
II.14	-3	(44)	(5.5)
II.22	-8	W	w
II.22	-7	$a_i^j(z) \frac{\partial w}{\partial z^j} \Big _w = 0$	$a_i^j(z) \frac{\partial w}{\partial z^j} \Big _W = 0$
II.74	7	$(P)\delta(u_2) \dots$	$(P_\mu)\delta(u_2) \dots$

